EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos
2000

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

V.S.F.F.

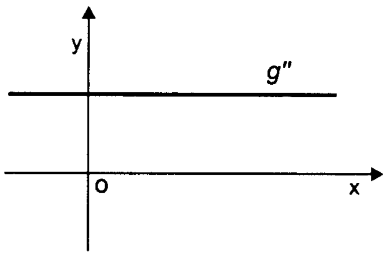
Primeira Parte

- As sete questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Sejam a, b e c três números reais tais que $\log_a(b) = c$
Qual é o valor de $\log_a(a\,b)$?

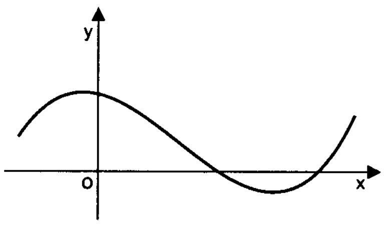
(A) $1+c$ **(B)** $a+c$ **(C)** $a\,c$ **(D)** $a+b\,c$

2. Na figura ao lado está representado o gráfico de g'', segunda derivada de uma certa função g.

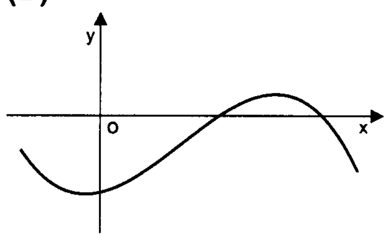


Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função g ?

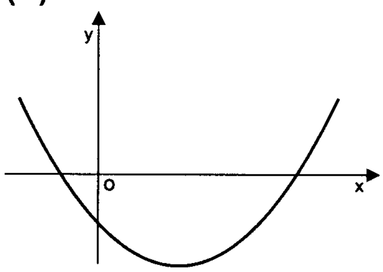
(A)



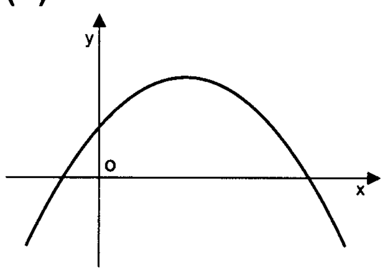
(B)



(C)



(D)



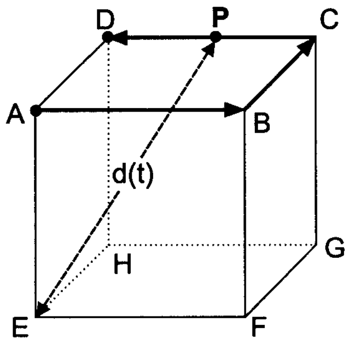
3. De uma função f, contínua em $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- f é estritamente crescente
- $f(0) = 1$
- O eixo Ox e a bissectriz dos quadrantes ímpares são assimptotas do gráfico de f

Qual é o contradomínio de f ?

(A) $[1, +\infty[$ **(B)** $]-\infty, 1]$ **(C)** $]0, +\infty[$ **(D)** $]-\infty, 0[$

4. Na figura está representado um cubo.



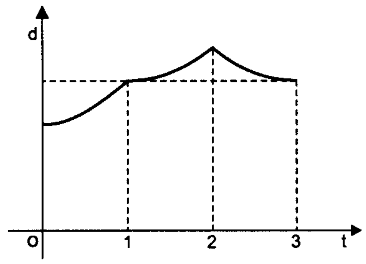
Considere que um ponto **P** se desloca ao longo do trajecto que a figura sugere: **P** parte de A e percorre sucessivamente as arestas $[AB]$, $[BC]$ e $[CD]$, terminando o percurso em D.

O ponto **P** demora um segundo a percorrer cada uma das arestas.

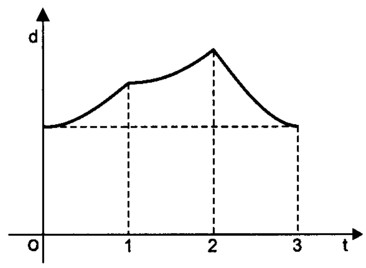
Seja $d(t)$ a distância do ponto **P** ao ponto E, t segundos após a partida.

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função d ?

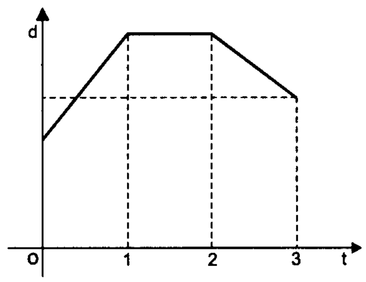
(A)



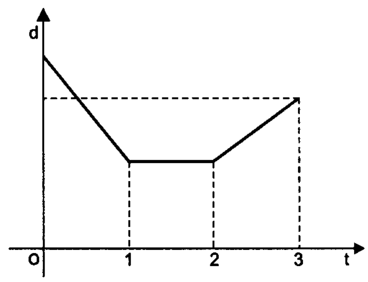
(B)



(C)



(D)



5. Cada uma de seis pessoas lança um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6. Qual é a probabilidade de os números saídos serem todos diferentes?

(A) $\frac{6!}{6^6}$ **(B)** $\frac{1}{6^6}$ **(C)** $\frac{1}{6!}$ **(D)** $\frac{1}{6}$

6. Uma caixa contém cinco bolas brancas e cinco bolas pretas, indistinguíveis ao tacto. Tiram-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa.

Considere os seguintes acontecimentos:

B_1 — a bola retirada em primeiro lugar é branca;

B_2 — a bola retirada em segundo lugar é branca.

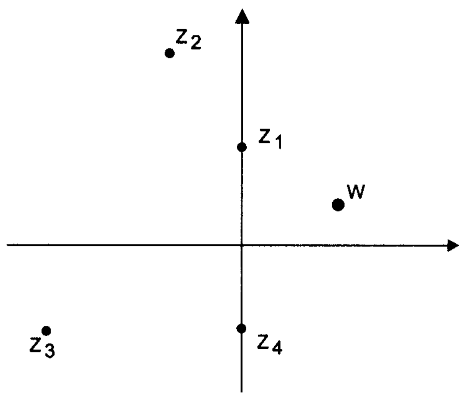
Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(B_2|B_1)$?

(A) $\frac{1}{2} \times \frac{4}{9}$ **(B)** $\frac{1}{2} \times \frac{5}{9}$ **(C)** $\frac{4}{9}$ **(D)** $\frac{5}{9}$

7. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexos:

w, z_1, z_2, z_3 e z_4



Qual é o número complexo que pode ser igual a $2iw$?

(A) z_1 **(B)** z_2 **(C)** z_3 **(D)** z_4

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

1.1. Considere o polinómio $x^3 - 3x^2 + 6x - 4$
Determine analiticamente as suas raízes em $\mathbb{C}$, sabendo que uma delas é 1.
Apresente-as na forma algébrica, simplificando-as o mais possível.

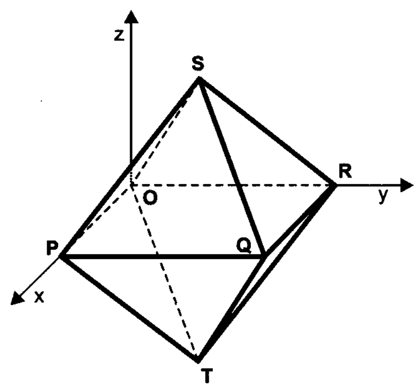
1.2. Seja z um número complexo de módulo 2 e $\overline{z}$ o seu conjugado.
No plano complexo, considere os pontos A e B tais que A é a imagem geométrica de z, e B a imagem geométrica de $\overline{z}$.
Sabe-se que:
- o ponto A está situado no primeiro quadrante
- o ângulo AOB é recto (O designa a origem do referencial)

Determine $\frac{z}{i}$, apresentando o resultado na forma algébrica.

2. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um octaedro regular.

Sabe-se que:

- um dos vértices do octaedro é a origem O do referencial
- a recta ST é paralela ao eixo Oz
- o ponto P pertence ao semieixo positivo Ox
- o ponto R pertence ao semieixo positivo Oy
- a aresta do octaedro tem comprimento 1



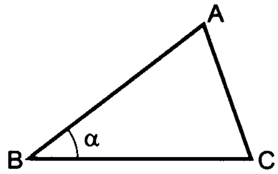
2.1. Escolhidos ao acaso dois vértices do octaedro, qual é a probabilidade de estes definirem uma recta contida no plano de equação $x = y$?
Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2.2. Seja A um ponto pertencente à aresta $[RS]$. Considere a secção produzida no octaedro por um plano que contém A e que é paralelo ao plano xOy.
Seja a a distância de A a R.
Considere a função f que faz corresponder, a cada valor de a, a área da referida secção.
Caracterize a função f, indicando domínio e expressão analítica.

3.

3.1. Seja $[ABC]$ um triângulo isósceles em que $\overline{BA} = \overline{BC}$.
Seja α a amplitude do ângulo ABC.
Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é dada por

$$\frac{\overline{BC}^{\,2}}{2} \times \operatorname{sen} \alpha \qquad (\alpha \in \,]0, \pi[\,)$$



3.2. Considere agora um polígono regular de n lados, inscrito numa circunferência de raio 1. Utilize o resultado da alínea anterior para mostrar que a área do polígono é dada por

$$A_n = \frac{n}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

3.3. Determine e interprete o valor de $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n$

4. Um laboratório farmacêutico lançou no mercado um novo analgésico: o *AntiDor*.
A concentração deste medicamento, em decigramas por litro de sangue, t horas após ser administrado a uma pessoa, é dada por

$$C(t) = t^2\, e^{-0{,}6\,t} \qquad (t \geq 0)$$

4.1. Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, determine o valor de t para o qual é máxima a concentração de *AntiDor* no sangue de uma pessoa que o tenha tomado.
Calcule o valor dessa concentração máxima, apresentando o resultado na unidade considerada, com aproximação às décimas.

4.2. O mesmo laboratório realizou uma campanha de promoção deste medicamento, baseada no *slogan*: «***AntiDor - Acção rápida e prolongada!***»
Numa breve composição, de sessenta a cento e vinte palavras, comente o *slogan*, tendo em conta que:
- para a maioria das dores, o *AntiDor* só produz efeito se a sua concentração for superior a 1 decigrama por litro de sangue;
- de acordo com uma associação de defesa do consumidor, um bom analgésico deve começar a produzir efeito, no máximo, meia hora após ter sido tomado, e a sua acção deve permanecer durante, pelo menos, cinco horas (após ter começado a produzir efeito).

Nota: na resolução desta questão, deve utilizar as capacidades gráficas da sua calculadora e enriquecer a sua composição com o traçado de um ou mais gráficos.

5. Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos (A e B são, portanto, subconjuntos de S).
Prove que

$$P(A) + P(B) + P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 + P(A \cap B)$$

(P designa probabilidade e $\overline{A}$ e $\overline{B}$ designam os acontecimentos contrários de A e de B).

FIM

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Círculo: $\pi\, r^2 \quad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - raio\ da\ base;\ g - geratriz)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - raio)$

Volumes

Prisma: *Área da base* × *Altura*

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3 \quad (r - raio)$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta) \,.\, (\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho'\, cis\,(\theta + \theta')$

$\frac{\rho\, cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\,\frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'\,.\,v + v'\,.\,u$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,.\,v - v'\,.\,u}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'\,.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'\,.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,.\,e^u$

$(a^u)' = u'\,.\,a^u\,.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

COTAÇÕES

Primeira Parte **63**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada.. - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **137**

1. 21
- **1.1.** 11
- **1.2.** 10

2. 31
- **2.1.** 16
- **2.2.** 15

3. 41
- **3.1.** 14
- **3.2.** 14
- **3.3.** 13

4. 29
- **4.1.** 14
- **4.2.** 15

5. 15

TOTAL **200**