

# EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)  
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos  
2001

1.ª FASE  
1.ª CHAMADA  
VERSÃO 1

## PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

---

### VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

V.S.F.F.

435.V1/1

---

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de dez.

**Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.**

## Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. De uma função  $f$ , contínua no intervalo  $[1, 3]$ , sabe-se que  $f(1) = 7$  e  $f(3) = 4$ . Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?
- (A) A função  $f$  tem pelo menos um zero no intervalo  $[1, 3]$   
(B) A função  $f$  não tem zeros no intervalo  $[1, 3]$   
(C) A equação  $f(x) = 5$  tem pelo menos uma solução no intervalo  $[1, 3]$   
(D) A equação  $f(x) = 5$  não tem solução no intervalo  $[1, 3]$
2. Qual das seguintes expressões é, para qualquer número real positivo  $a$ , igual a  $e^{2 \ln a}$ ? (  $\ln$  designa logaritmo de base  $e$  )
- (A)  $2a$                       (B)  $2 + a$                       (C)  $2^a$                       (D)  $a^2$
3. A recta de equação  $y = x$  é tangente ao gráfico de uma certa função  $f$ , no ponto de abscissa 0. Qual das seguintes expressões pode definir a função  $f$ ?
- (A)  $x^2 + x$                       (B)  $x^2 + 2x$                       (C)  $x^2 + 2x + 1$                       (D)  $x^2 + x + 1$

V.S.F.F.

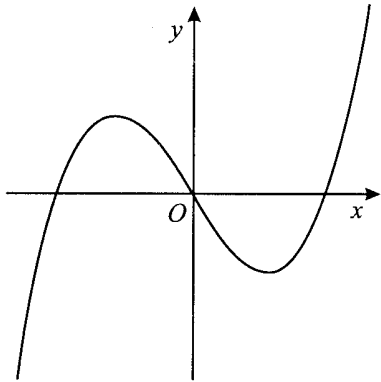
435.V1/3

4. Seja  $g$  uma função, de domínio  $\mathbb{R}$ , tal que a sua **segunda derivada** é definida por

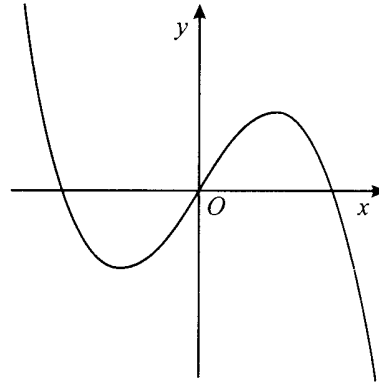
$$g''(x) = 1 - x^2$$

Em qual das figuras seguintes poderá estar parte da representação gráfica da **função**  $g$  ?

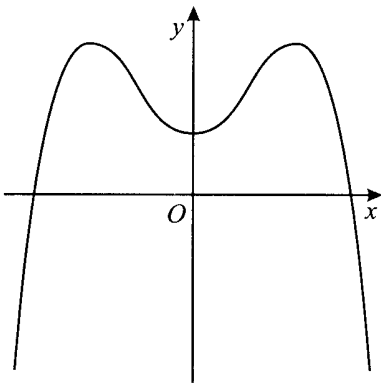
(A)



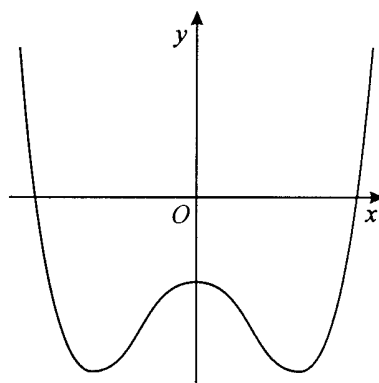
(B)



(C)



(D)



5. *Capicua* é uma sequência de algarismos cuja leitura da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita dá o mesmo número.

Por exemplo, 75957 e 30003 são *capicuas*.

Quantas *capicuas* existem com cinco algarismos, sendo o primeiro algarismo ímpar ?

- (A) 300                      (B) 400                      (C) 500                      (D) 600

6. Uma caixa tem cinco bombons, dos quais apenas dois têm licor.

Tira-se da caixa, ao acaso, uma amostra de três bombons.

Considere que  $X$  designa a variável «número de bombons **com licor** existentes nessa amostra».

Qual das seguintes distribuições de probabilidades pode ser a da variável  $X$  ?

(A)

$x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{{}^5C_3}$	$\frac{6}{{}^5C_3}$	$\frac{3}{{}^5C_3}$

(B)

$x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{{}^5C_3}$	$\frac{6}{{}^5C_3}$	$\frac{1}{{}^5C_3}$

(C)

$x_i$	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{{}^5C_3}$	$\frac{6}{{}^5C_3}$	$\frac{3}{{}^5C_3}$

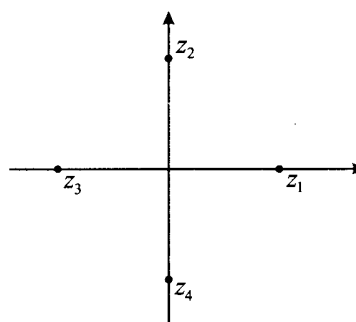
(D)

$x_i$	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{{}^5C_3}$	$\frac{6}{{}^5C_3}$	$\frac{1}{{}^5C_3}$

7. Seja  $w$  um número complexo diferente de 0, cuja imagem geométrica, no plano complexo, está no primeiro quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Seja  $\bar{w}$  o conjugado de  $w$ .

Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de quatro números complexos:  $z_1, z_2, z_3$  e  $z_4$ .



Qual deles pode ser igual a  $\frac{w}{\bar{w}}$  ?

(A)  $z_1$

(B)  $z_2$

(C)  $z_3$

(D)  $z_4$

V.S.F.F.

435.V1/5

## Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

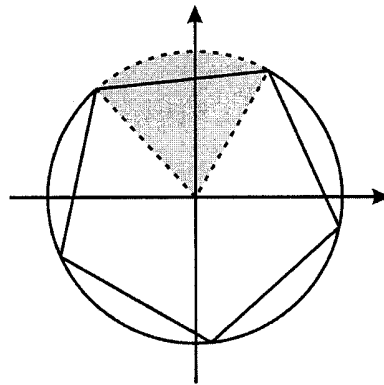
**Atenção:** quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, seja  $z_1 = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$

1.1. Sem recorrer à calculadora, verifique que  $\frac{z_1^3 + 2}{i}$  é um imaginário puro.

1.2. No plano complexo, a imagem geométrica de  $z_1$  é um dos cinco vértices do pentágono regular representado na figura. Este pentágono está inscrito numa circunferência centrada na origem do referencial.

Defina, por meio de uma condição em  $\mathbb{C}$ , a região sombreada, excluindo a fronteira.



2. Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = 3x - 2 \ln x$  ( $\ln$  designa logaritmo de base  $e$ ).

2.1. Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as duas alíneas seguintes.

2.1.1. Estude  $f$  quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

2.1.2. Mostre que a função  $f$  tem um único mínimo.

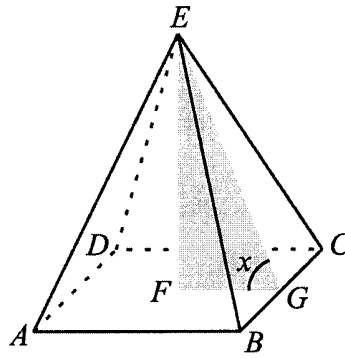
2.2. O gráfico de  $f$  contém um único ponto cuja ordenada é o quadrado da abcissa. Recorrendo à calculadora, determine um valor aproximado para a abcissa desse ponto (apresente o resultado arredondado às décimas).

Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).

3. Na figura está representada uma pirâmide quadrangular regular.

Sabe-se que:

- A base da pirâmide tem centro  $F$  e lado 2
- $G$  é o ponto médio da aresta  $[BC]$
- $x$  designa a amplitude do ângulo  $FGE$



- 3.1. Mostre que a área total da pirâmide é dada, em função de  $x$ , por

$$A(x) = \frac{4 \cos x + 4}{\cos x} \quad \left(x \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \right)$$

- 3.2. Calcule  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} A(x)$  e interprete geometricamente o valor obtido.

4. Num saco existem quinze bolas, indistinguíveis ao tacto.

Cinco bolas são amarelas, cinco são verdes e cinco são brancas.

Para cada uma das cores, as bolas estão numeradas de 1 a 5.

- 4.1. Retirando todas as bolas do saco e dispondo-as, ao acaso, numa fila, qual é a probabilidade de as bolas da mesma cor ficarem todas juntas?

Apresente o resultado na forma de dízima, com sete casas decimais.

- 4.2. Suponha agora que, no saco, estão apenas **algumas** das quinze bolas.

Nestas novas condições, admita que, ao retirarmos, ao acaso, uma bola do saco, se tem:

- a probabilidade de essa bola ser amarela é 50 %
- a probabilidade de essa bola ter o número 1 é 25 %
- a probabilidade de essa bola ser amarela ou ter o número 1 é 62,5 %

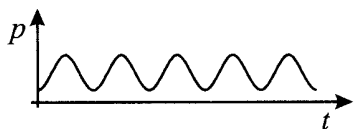
Prove que a bola amarela número 1 está no saco.

V.S.F.F.

435.V1/7

5. A Joana está a encher um balão.

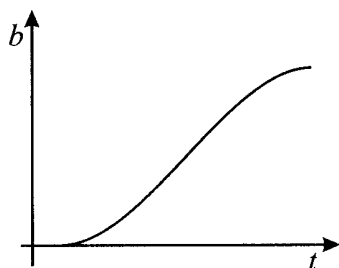
Na figura abaixo está o gráfico da função que dá a massa  $p$  de ar, nos pulmões da Joana,  $t$  segundos após o instante em que ela, pela primeira vez, começa a inspirar o ar, para encher o balão.



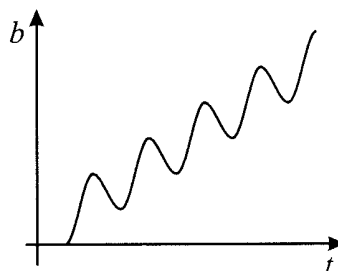
Para encher o balão, a Joana precisa de inspirar várias vezes, mas, de cada vez que inspira, mantém o pipo apertado, evitando assim que o ar saia do balão.

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função que dá a massa  $b$  de ar no balão,  $t$  segundos após o referido instante (aquele em que, pela primeira vez, a Joana começa a inspirar o ar, para encher o balão)?

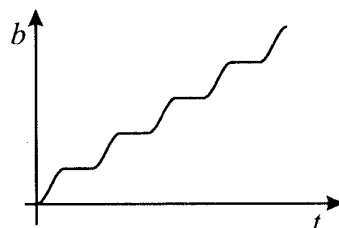
(A)



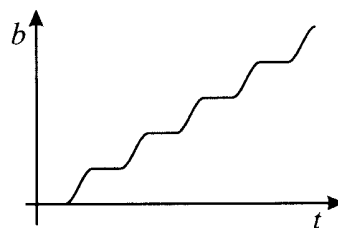
(B)



(C)



(D)



Numa pequena composição, de dez a quinze linhas, aproximadamente, justifique a sua resposta.

**Note bem:**

Não explique por que razão considera adequado o gráfico por si escolhido como correcto. Deve limitar-se a explicar por que é que os outros três estão incorrectos, apresentando, para cada um deles, uma razão pela qual o rejeita.

**FIM**



## COTAÇÕES

**Grupo I .....63**

Cada resposta certa ..... +9  
Cada resposta errada..... -3  
Cada questão não respondida ou anulada ..... 0

**Nota:**

Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

**Grupo II .....137**

1. .... 21  
    1.1. .... 11  
    1.2. .... 10

2. .... 43  
    2.1. .... 30  
        2.1.1. .... 15  
        2.1.2. .... 15  
    2.2. .... 13

3. .... 26  
    3.1. .... 13  
    3.2. .... 13

4. .... 32  
    4.1. .... 16  
    4.2. .... 16

5. .... 15

**TOTAL .....200**

**V.S.F.F.**

435.V1/9

## Formulário

### Áreas de figuras planas

$$\text{Losango: } \frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$$

$$\text{Trapézio: } \frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$$

$$\text{Polígono regular: } \text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$$

$$\text{Círculo: } \pi r^2 \quad (r - \text{raio})$$

### Áreas de superfícies

$$\text{Área lateral de um cone: } \pi r g$$

( $r$  – raio da base;  $g$  – geratriz)

$$\text{Área de uma superfície esférica: } 4\pi r^2$$

( $r$  – raio)

### Volumes

$$\text{Prisma: } \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Cilindro: } \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Pirâmide: } \frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Cone: } \frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Esfera: } \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (r - \text{raio})$$

### Trigonometria

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$$

$$\text{cos}(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$$

$$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

### Complexos

$$(\rho \text{ cis } \theta) \cdot (\rho' \text{ cis } \theta') = \rho \rho' \text{ cis } (\theta + \theta')$$

$$\frac{\rho \text{ cis } \theta}{\rho' \text{ cis } \theta'} = \frac{\rho}{\rho'} \text{ cis } (\theta - \theta')$$

$$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis } (n\theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{ cis } \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \{0, \dots, n-1\}$$

### Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma

$$\text{Prog. Aritmética: } \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$

$$\text{Prog. Geométrica: } u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

### Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\text{sen } u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\text{cos } u)' = -u' \cdot \text{sen } u$$

$$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

### Limites notáveis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$