

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos
2001

1.ª FASE
1.ª CHAMADA

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I 63

Cada resposta certa +9
Cada resposta errada -3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:

Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II 137

1. 21

1.1. 11
1.2. 10

2. 43

2.1. 30
2.1.1. 15
2.1.2. 15
2.2. 13

3. 26

3.1. 13
3.2. 13

4. 32

4.1. 16
4.2. 16

5. 15

TOTAL **200**

V.S.F.F.

435/C/1

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	C	D	A	C	C	A	B
Versão 2	D	A	C	A	C	B	A

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas Resp. certas	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

Grupo II

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicitar todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.1.11

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

$$\begin{aligned} \frac{z_1^3 + 2}{i} &= \\ &= \frac{(2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3})^3 + 2}{i} \dots\dots\dots 1 \\ &= \frac{8 \operatorname{cis} \pi + 2}{i} \dots\dots\dots 4 \\ &= \frac{-6}{i} \dots\dots\dots 3 \\ &= 6i \dots\dots\dots 2 \\ \text{Referir que } 6i &\text{ é um imaginário puro } \dots\dots\dots 1 \end{aligned}$$

2.º Processo

$$\begin{aligned} \frac{z_1^3 + 2}{i} &= \\ &= \frac{(2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3})^3 + 2}{i} \dots\dots\dots 1 \\ &= \frac{(1 + \sqrt{3}i)^3 + 2}{i} \dots\dots\dots 3 \\ &= \frac{1 + 3\sqrt{3}i - 9 - 3\sqrt{3}i + 2}{i} \dots\dots\dots 3 \\ &= \frac{-6}{i} \dots\dots\dots 1 \\ &= 6i \dots\dots\dots 2 \\ \text{Referir que } 6i &\text{ é um imaginário puro } \dots\dots\dots 1 \end{aligned}$$

V.S.F.F.

435/C/3

1.2.10

Condição que define o interior do círculo
(por exemplo $|z| < 2$) (ver nota) 3

Condição que define a região compreendida
entre as duas semi-rectas, excluindo-as 5

$$\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{5} = \frac{11\pi}{15} \dots\dots\dots 3$$

Escrever a condição $\frac{\pi}{3} < \arg(z) < \frac{11\pi}{15}$
(ou equivalente) (ver nota) 2

Condição que define a região sombreada 2

Nota:

Se o examinando escrever o símbolo \leq , em vez do símbolo $<$, deverá ser penalizado em 1 ponto por cada símbolo incorrecto, até um total de 3 pontos.

2.1.1.15

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \dots\dots\dots 3$$

Concluir que a recta de equação $x = 0$ é assíptota do gráfico de f 2

Referir que, pelo facto de f ser contínua em \mathbb{R}^+ , o seu gráfico não tem outras assíptotas verticais 1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3 \dots\dots\dots 4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2 \ln x) = -\infty \dots\dots\dots 3$$

Concluir que não existe assíptota do gráfico de f quando
 $x \rightarrow +\infty$ 2

Nota:

O examinando pode, ao estudar a existência de assíptota do gráfico de f , quando $x \rightarrow +\infty$, começar por estudar a existência de assíptota horizontal. Neste caso, as cotações relativas às três últimas etapas passam a ser 3, 2 e 1 pontos, transitando os 3 pontos retirados para:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \dots\dots\dots 2$$

Concluir que não existe assíptota horizontal do gráfico
de f quando $x \rightarrow +\infty$ 1

2.1.2.15

$f'(x) = 3 - \frac{2}{x}$ 5

$3 - \frac{2}{x} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ 4

Estudar o sinal de f' (**ver nota**) 4

Concluir que $f\left(\frac{2}{3}\right)$ é o único mínimo de f (**ver nota**) 2

Nota:

O examinando pode apresentar o estudo do sinal de f' e o estudo da monotonia de f , para concluir que $f\left(\frac{2}{3}\right)$ é o único mínimo de f , por meio de um quadro.

2.2.13

Equacionar o problema ($3x - 2 \ln x = x^2$ ou equivalente) 3

Explicação do método utilizado para resolver graficamente a equação (**ver nota 1**) 6

Indicação do valor da abcissa pedida (**ver nota 2**) 4

Notas:

1. A explicação do método utilizado deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

O examinando apresenta o gráfico da função f e a parábola de equação $y = x^2$ e assinala correctamente o ponto de intersecção (ou apresenta o gráfico da função definida por $3x - 2 \ln x - x^2$ e assinala correctamente o seu zero) 6

O examinando não apresenta qualquer gráfico, mas refere a utilização de ferramentas da calculadora (por exemplo: *Intersect*, *Zoom*, *Trace*, ...) ou de algo que evidencie a procura do referido ponto de intersecção (ou do referido zero) 3

O examinando não apresenta qualquer gráfico nem qualquer explicação, ou limita-se a apresentar uma referência do tipo «Vi na calculadora» 0

V.S.F.F.

435/C/5

2. A escrita da abcissa do ponto de intersecção deve ser cotada, independentemente de o examinando ter, ou não, explicado o método utilizado, de acordo com o seguinte critério:

1.º Caso (apresentação do resultado arredondado às décimas, de acordo com o enunciado):

Resposta 2,3	4
Resposta 2,2 ou 2,4	3
Resposta 2,1 ou 2,5	2
Resposta 2,0 ou 2,6	1
Outros resultados	0

2.º Caso (apresentação do resultado com aproximação superior às décimas):

Valor no intervalo [2,26 ; 2,30]	3
Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo [2,20 ; 2,36]	2
Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo [2,10 ; 2,46]	1
Outros resultados	0

3.º Caso (apresentação do resultado arredondado às unidades):

Valor igual a 2	1
Outros resultados	0

3.1. 13

$\overline{FG} = 1$	1
$\cos x = \frac{1}{\overline{EG}}$	2
$\overline{EG} = \frac{1}{\cos x}$	2
Área de uma face lateral = $\frac{1}{\cos x}$	4
Área lateral = $\frac{4}{\cos x}$	1
Área total = $4 + \frac{4}{\cos x}$	2
Área total = $\frac{4 \cos x + 4}{\cos x}$	1

3.2.13

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} A(x) = +\infty$ 6

Interpretação (A área total pode ser tão grande quanto se queira, desde que o ângulo em questão se aproxime suficientemente do ângulo recto.)7

4.1.16

Escrita da fracção $\frac{(5!)^3 \times 3!}{15!}$ (ver notas 1, 2, 3, 4 e 5) 13

Probabilidade pedida = 0,0000079 (ver notas 6, 7, 8 e 9)..... 3

Notas:

1. O examinando pode começar por indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e só depois escrever a fracção.
No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente a fracção, não deverá ser penalizado.
2. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da fracção, com a respectiva cotação a atribuir.

$\frac{(5!)^3 \times 3!}{15!}$ (fracção correcta).....13

$\frac{(5!)^3}{15!}$ 8

$\frac{3! \times 5!}{15!}$ 6

$\frac{3!}{15!}$ 5

Outras fracções com denominador 15!4

3. Se o examinando indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído à sua resposta menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

V.S.F.F.

435/C/7

4. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos possíveis, deverão ser atribuídos 3 pontos à sua resposta.
5. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos favoráveis, deverão ser atribuídos 9 pontos à sua resposta.
6. Se o examinando apresentar o resultado 0,000007 ou 0,000008, deverá ser penalizado em 1 ponto.
7. Se o examinando apresentar o resultado correcto na forma de dízima, mas com mais de sete casas decimais, também deverá ser penalizado em 1 ponto.
8. Se o examinando apresentar o resultado correcto, mas na forma de notação científica (tal como é apresentado na calculadora), deverá ser penalizado em 2 pontos.
9. Qualquer outra forma de apresentação do resultado final deverá ser cotada com 0 pontos.

4.2.16

No que se segue, vamos designar por $P(A)$ a probabilidade de «sair bola amarela» e por $P(B)$ a probabilidade de «sair bola com o número 1». Como é evidente, o examinando poderá escolher outras designações. Também poderá apresentar o seu raciocínio através de um diagrama ou de um esquema.

Identificar $P(A \cup B)$ como sendo a probabilidade de «sair bola amarela ou com o número 1» 2

Identificar $P(A \cap B)$ como sendo a probabilidade de «sair a bola amarela número 1» 2

Aplicar a fórmula $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ para concluir que $P(A \cap B) = 12,5\%$ 4

Concluir que, sendo positiva a probabilidade de «sair a bola amarela número 1», tal significa que é possível retirar essa bola do saco, pelo que ela lá está (**ver nota**)..... 8

Nota:

O examinando deverá referir **explicitamente** o facto de ser positiva a probabilidade de «sair a bola amarela número 1», ou, em alternativa, que, como $P(A \cap B) = 12,5\%$, esse acontecimento é possível. Se não o fizer, os 8 pontos previstos para a conclusão não deverão ser atribuídos.

Apresenta-se a seguir um exemplo de resposta.

O gráfico A não se adequa à situação descrita, pois a massa de ar no balão não aumenta durante cada inspiração da Joana, pelo que a função não pode ser estritamente crescente.

O gráfico B também não é o correcto, uma vez que a Joana não deixa sair ar do balão e, como tal, a massa de ar dentro deste nunca pode diminuir.

O gráfico C também não traduz a situação descrita, porque, tal como o gráfico da função que dá a massa de ar nos pulmões da Joana ilustra, o processo inicia-se com uma inspiração, durante a qual a massa de ar existente no balão permanece nula, ao contrário do que este gráfico nos mostra.

Portanto, o gráfico correcto é o gráfico D.

Na tabela seguinte, indica-se como devem ser atribuídos os 15 pontos.

Forma Conteúdo	Nível 1 (*)	Nível 2 (**)	Nível 3 (***)
Rejeita os três gráficos incorrectos.	15	13	11
Rejeita dois gráficos incorrectos.	10	8	6
Rejeita apenas um gráfico incorrecto.	5	4	3

- (*) **Nível 1** - Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).
- (**) **Nível 2** - Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecte a inteligibilidade.
- (***) **Nível 3** - Redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade.

Pode acontecer que uma composição não se enquadre completamente num dos três níveis descritos e/ou contenha características presentes em mais do que um deles. Nesse caso, deverá ser atribuída uma pontuação intermédia, desde que respeite a indicação, dada nos critérios gerais, de que a cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.