

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos
2001

1.ª FASE
2.ª CHAMADA

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa +9
Cada resposta errada - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:

Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
 1.1. 10
 1.2. 11

2. 28
 2.1. 14
 2.2. 14

3. 41
 3.1. 28
 3.1.1. 14
 3.1.2. 14
 3.2. 13

4. 15

5. 32
 5.1. 14
 5.2. 18

TOTAL **200**

V.S.F.F.

435/C/1

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	A	B	A	B	D	C	D
Versão 2	D	C	D	C	B	B	A

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas Resp. certas	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

Grupo II

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicitar todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Crítérios específicos

1.1.10

- Indicar o complexo $-4i$ 2
- Lado do losango = 52
- Aplicar o Teorema de Pitágoras2
- Indicar o complexo 32
- Indicar o complexo -3 2

1.2.11

$(\sqrt{2} cis \frac{\pi}{4})^2 = 2i$ 6

$(\sqrt{2} cis \frac{\pi}{4})^2 =$
 $= (1 + i)^2$ 3
 $= 2i$ 3

ou

$(\sqrt{2} cis \frac{\pi}{4})^2 =$
 $= 2 cis \frac{\pi}{2}$ 3
 $= 2i$ 3

$z = \frac{2+4i}{2i}$ 1

$z = 2 - i$ 4

2.1.14

Equacionar o problema $(1,4 = -0,52 + 0,55 \ln(p))$ 5

$\ln(p) \approx 3,49$ 2

$p \approx e^{3,49}$ 5

$p \approx 33$ (ver nota) 2

Nota:

Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às unidades, ou se o arredondamento estiver incorrecto, deverá ser penalizado em 1 ponto.

V.S.F.F.

435/C/3

2.2.14

$A(2p) = -0,52 + 0,55 \ln(2p) \dots\dots\dots 2$

$A(2p) - A(p) = 0,55 \ln 2 \dots\dots\dots 5$

$A(2p) - A(p) \approx 0,38$ (ver nota 1)..... 2

Interpretação (ver nota 2)5

Notas:

1. Se o examinando não apresentar o resultado com duas casas decimais, deverá ser penalizado em 1 ponto.

2. Apresentam-se a seguir duas interpretações possíveis:

«Se o peso de um rapaz é o dobro do peso de outro, a diferença entre as suas alturas é, aproximadamente, 38 cm.»

«Se o peso de um rapaz duplica, a sua altura aumenta, aproximadamente, 38 cm.»

3.1.1.14

$f'(x) = 1 - 2 \sin x \dots\dots\dots 3$

$1 - 2 \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6} \dots\dots\dots 3$

Referir que $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ é a ordenada de A 1

Referir que $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ é a ordenada de B1

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{6} \dots\dots\dots 3$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + 2 \cos \frac{\pi}{6} \dots\dots\dots 1$

$= \frac{\pi}{6} + 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \dots\dots\dots 1$

$= \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{6} \dots\dots\dots 1$

$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{6} \dots\dots\dots 3$

$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6} + 2 \cos \frac{5\pi}{6} \dots\dots\dots 1$

$= \frac{5\pi}{6} - 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \dots\dots\dots 1$

$= \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{6} \dots\dots\dots 1$

3.1.2.14

$f(2\pi) = 2\pi + 2$ 5

Indicação do contradomínio $\left(\left[\frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{6}, 2\pi + 2 \right] \right)$ 9

3.2.13

Equacionar o problema ($f(x) = \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{6}$ ou equivalente)3

Explicação do método utilizado para resolver graficamente a equação (ver nota 1)..... 6

Indicação do valor aproximado da abcissa do ponto C (ver nota 2).....4

Notas:

1. A explicação do método utilizado deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

O examinando apresenta o gráfico da função f e a recta de equação $y = \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{6}$ e assinala correctamente o ponto C (ou apresenta o gráfico da função definida por $f(x) - \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{6}$ e assinala correctamente o seu segundo zero)..... 6

O examinando não apresenta qualquer gráfico, mas refere a utilização de ferramentas da calculadora (por exemplo: *Intersect*, *Zoom*, *Trace*, ...) ou de algo que evidencie a procura do referido ponto de intersecção (ou do referido zero)3

O examinando não apresenta qualquer gráfico nem qualquer explicação, ou limita-se a apresentar uma referência do tipo «Vi na calculadora».....0

2. A escrita da abcissa do ponto de intersecção deve ser cotada, independentemente de o examinando ter, ou não, explicado o método utilizado, de acordo com o seguinte critério:

1.º Caso (apresentação do resultado arredondado às décimas, de acordo com o enunciado):

Resposta 3,8	4
Resposta 3,7 ou 3,9	3
Resposta 3,6 ou 4,0	2
Outros resultados	0

2.º Caso (apresentação do resultado com aproximação superior às décimas):

Valor no intervalo [3,80 ; 3,84]	3
Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo [3,74 ; 3,90]	2
Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo [3,65 ; 3,99]	1
Outros resultados	0

3.º Caso (apresentação do resultado arredondado às unidades):

Valor igual a 4	2
Outros resultados	0

4.15

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{g(x)}{x} \times \frac{1}{x} \right) \dots\dots\dots 6$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{g(x)}{x} \right) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) \dots\dots\dots 2$$

$$= 1 \times 0 \dots\dots\dots 5 (3+2)$$

Concluir que o eixo Ox é assíntota do gráfico de f 2

5.1.14

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Escrita da expressão $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ 13
 Resultado final 1

2.º Processo

Número de casos possíveis = 3^2
 Número de casos favoráveis = 1
 Probabilidade pedida = $\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

Neste segundo processo, as cotações devem ser atribuídas de acordo com o seguinte critério:

Escrita da fracção $\frac{1}{3^2}$ (**ver notas 1, 2, 3 e 4**) 13
 Resultado final 1

Notas:

- O examinando pode começar por indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e só depois escrever a fracção.
 No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente a fracção, não deverá ser penalizado.

V.S.F.F.

435/C/7

2. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da fracção, com a respectiva cotação a atribuir.

$\frac{1}{3^2}$ (fracção correcta).....	13
Outras fracções com denominador 3^2	4

3. Se o examinando indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído à sua resposta menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.
4. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos possíveis ou apenas o número de casos favoráveis, deverão ser atribuídos 3 pontos à sua resposta.

5.2. 18

Apresenta-se a seguir um exemplo de resposta:

De acordo com a Regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis à realização desse acontecimento e o número de casos possíveis, se estes forem todos equiprováveis.

O número de casos possíveis é $6!$ (número de maneiras de seis pessoas permutarem).

O número de casos favoráveis é 2^4 . De facto, ficando o casal Martins no meio, ou os Nunes se sentam à direita dos Martins, e os Santos à esquerda, ou vice-versa. Para cada uma destas duas maneiras de os três casais se sentarem, existem $2 \times 2 \times 2$ maneiras de as seis pessoas ocuparem os seus lugares (para cada casal, há duas maneiras de as duas pessoas se sentarem).

A probabilidade pedida é, portanto, $\frac{2^4}{6!}$.

Tal como o exemplo ilustra, para que a composição possa ser considerada completa, deverá contemplar os seguintes pontos:

Regra de Laplace

1. referência ao facto de que a probabilidade de um acontecimento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis à realização desse acontecimento e o número de casos possíveis;
2. referência à necessidade de equiprobabilidade dos casos possíveis.

Casos possíveis

3. explicação do número de casos possíveis.

Casos favoráveis

4. explicação de que, ficando o casal Martins no meio, ou os Nunes se sentam à direita dos Martins, e os Santos à esquerda, ou vice-versa;
5. explicação de que, para cada casal, há duas maneiras de as duas pessoas se sentarem.

Na tabela seguinte, indica-se como esta alínea deve ser cotada.

Forma Conteúdo	Nível 1 (*)	Nível 2 (**)	Nível 3 (***)
A composição contempla os cinco pontos.	18	16	14
A composição contempla quatro pontos.	14	12	10
A composição contempla três pontos.	10	8	6
A composição contempla dois pontos.	6	5	4
A composição contempla um ponto.	2	1	0

- (*) **Nível 1** - Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).
- (**) **Nível 2** - Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecte a inteligibilidade.
- (***) **Nível 3** - Redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade.

Pode acontecer que uma composição não se enquadre completamente num dos três níveis descritos e/ou contenha características presentes em mais do que um deles. Nesse caso, deverá ser atribuída uma pontuação intermédia, desde que respeite a indicação, dada nos critérios gerais, de que a cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.