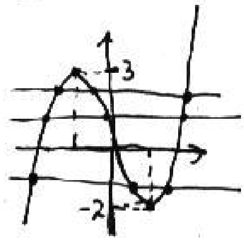
EXAME 435 Versão 1 05/09/2001

1) $K=1$ porque $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln(x+1) = \ln(1) = 0$

(C)

2)



$g(x)=b$ tem 3 soluções distintas se $b \in]-2,3[$

(D)

3) $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} \cdot \lim_{x\to 3} \frac{1}{x+3} =$

$= f'(3) \cdot \frac{1}{3+3} = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

(A)

4) À medida que o ponto P se desloca (partindo de A), a distância começa por aumentar, depois, a partir de certa altura, a distância diminui, atingindo um mínimo para um $\theta \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$. Quando o ponto P atinge novamente o ponto A, a distância é igual à inicial, isto é, $d(0) = d(2\pi)$.

(B)

5) A operadora B não possui nenhum número formado apenas por algarismos ímpares porque o indicativo é 52 (inclui um par). Então, os números só com algarismos ímpares são:

$\underline{1} \times \underline{1} \times \underline{5} \times \underline{5} \times \underline{5} \times \underline{5} \times \underline{5} \times \underline{5} \times \underline{5} = 5^7$

$\underline{1} \times \underline{1} \times \underline{5} \times \underline{5} \times \underline{5} \times \underline{5} \times \underline{5} \times \underline{5} \times \underline{5}$

$5^7 + 5^7 = 156250$

(C)

6)

Dado \ bolas	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2									
3									
4									
5									
6									

casos favoráveis $= 3 \times 3 = 9$

casos possíveis $= 6 \times 9 = 54$

$P = \frac{9}{54} = \frac{1}{6}$

(B)

7) $z = 3+4i$

$\rho = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

$tg\,\theta = \frac{4}{3} \wedge \theta \in 1.^{\circ}Q. \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta \simeq 53,13^{\circ} = 0,927$ rad.

$z = 5\,cis(0,927)$

$\sqrt{z} = \sqrt{5}\ cis\left(\frac{0,927+2k\pi}{2}\right) = \sqrt{5}\ cis(0,464+k\pi)$

Para $k=0$; $z_1 = \sqrt{5}\ cis(0,464) = 2+1i \in 1.^{\circ}$ quadrante

$k=1$; $z_2 = \sqrt{5}\ cis(0,464+\pi) = -2-i \in 3.^{\circ}$ quadrante

A

GRUPO II

1.1 $(2+i-2)^{11}(1+3i)^2 = i^{11}(1+6i+(3i)^2) = -i(1+6i-9) =$
$= -i+6+9i = 6+8i$

1.2 $\frac{1}{w} = \frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i}{4-i^2} = \frac{2-i}{4+1} = \frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$

Por outro lado,

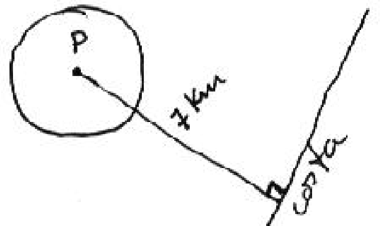
$\sqrt{2}\ cis\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\ sen\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$
$= -1+i$

Então, o inverso de w <u>não é</u> igual a $\sqrt{2}\ cis\frac{3\pi}{4}$

2.1 $\frac{A(t+1)}{A(t)} = \frac{16\,e^{0,1(t+1)}}{16\,e^{0,1t}} = \frac{e^{0,1t}\times e^{0,1}}{e^{0,1t}} = e^{0,1} = 1,1$

No dia seguinte ao acidente, em cada hora, a mancha de crude aumenta 10%. (Nota: $1,1 = 1+0,1$)

2.2



Ao atingir a costa, a mancha de crude terá a forma de um círculo de raio 7, isto é, a sua área será $\pi\times 7^2 = 49\pi$

Então, $16\,e^{0,1t} = 49\pi \Leftrightarrow e^{0,1t} = \frac{49\pi}{16} \Leftrightarrow 0,1t = \ln\left(\frac{49\pi}{16}\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow t \simeq 22,64$ horas

$22{,}64$ horas $= 22\,h + 0{,}64\,h$

$1\,h \text{ — } 60\,m$
$0{,}64\,h \text{ — } x\,m$
$x = 38{,}4$ minutos

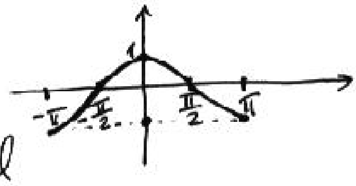
A mancha atinge a costa no dia seguinte ao acidente às 22 horas e 38 minutos.

3.1) Assimptotas verticais:

$D_f = \{x \in \mathbb{R} : 1+\cos x \neq 0\}$

$1+\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \pi + 2k\pi$

$D_f =]-\pi, \pi[$



$$\lim_{x\to -\pi^+} \frac{\cos x}{1+\cos x} = \frac{-1}{1+(-1^+)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

A recta $\boxed{x=-\pi}$ é assimptota vertical

$$\lim_{x\to \pi^-} \frac{\cos x}{1+\cos x} = \frac{-1}{1+(-1^+)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

A recta $\boxed{x=\pi}$ é assimptota vertical

A função não tem assimptotas não verticais porque o seu domínio é limitado.

3.2) $$f'(x) = \frac{(\cos x)'.(1+\cos x) - (1+\cos x)'.\cos x}{(1+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{-\operatorname{sen} x\,(1+\cos x) - (-\operatorname{sen} x).\cos x}{(1+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{-\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x}{(1+\cos x)^2} = \frac{-\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2}$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow -\operatorname{sen} x = 0 \wedge (1+\cos x)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0 \wedge 1+\cos x \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = k\pi \wedge \cos x \neq -1$

Como $D_f =]-\pi, \pi[$, $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

Para $k=0$
$x=0$
Para $k=1$
$x=\pi \notin D_f$

x	$-\pi$		0		π
$-\operatorname{sen} x$		$+$	0	$-$	
$(1+\cos x)^2$		$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	Máximo	$\searrow$	

Máximo $= f(0) =$

$= \dfrac{\cos 0}{1+\cos 0} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

3.3) O ponto P tem coordenadas $P(x,0)$ e pertence ao gráfico de f. Então, $0 = \dfrac{\cos x}{1+\cos x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \;\wedge\; x \in D_f \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{2}$

Atendendo à figura, $P\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$

O ponto Q tem coordenadas $Q\left(x, \dfrac{1}{3}\right)$. Então,

$\dfrac{1}{3} = \dfrac{\cos x}{(1+\cos x)} \Leftrightarrow 1+\cos x = 3\cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 = 2\cos x \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$

Atendendo ao D_f e à figura, concluímos que $x = \dfrac{\pi}{3}$

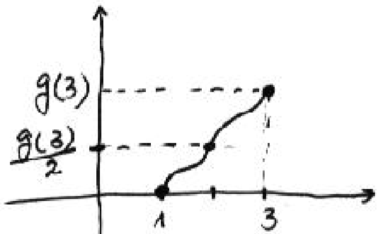
$Q\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$

Área do trapézio $= \dfrac{B+b}{2} \times h = \dfrac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{\frac{5\pi}{6}}{6} = \dfrac{5\pi}{36}$

4) $g(1) = 0$

$g(3) > 0$

$\dfrac{g(3)}{2} < g(3)$



se a função é contínua em $\mathbb{R}$, é contínua em $]1,3[$. Como $\dfrac{g(3)}{2} \in \;]g(1), g(3)[$ podemos concluir que existe pelo menos um $x \in \;]1,3[$ tal que $g(x) = \dfrac{g(3)}{2}$

5.1) O delegado pode ocupar qualquer um dos 3 cargos (3 hipóteses). Os restantes alunos podem ocupar os outros dois cargos.

N.º comissões $= 3 \times {}^{24}A_2 = 1656$

5.2.1) Podemos ter 2 rapazes e uma rapariga ou 2 raparigas e um rapaz.

$\underline{♂}\ \underline{♀}\ \underline{♀} \qquad \underline{♀}\ \underline{♂}\ \underline{♂}$

$$3\times {}^{10}A_1 \times {}^{15}A_2 + 3\times {}^{15}A_1 \times {}^{10}A_2 = 3\times 10\times 210 + 3\times 15\times 90 =$$
$$= 10350$$

5.2.2) Pretende-se calcular a probabilidade da comissão ser formada apenas por raparigas, sabendo-se que a presidente e a tesoureira são raparigas.
O primeiro papel a sair tem o nome de uma rapariga e o segundo tem o nome de outra rapariga. Ao tirar o terceiro papel a probabilidade de sair rapariga é

$\frac{13}{23}$ $13 \rightarrow$ depois de terem saído duas raparigas sobram 13 raparigas.

$23 \rightarrow$ depois de sairem 2 raparigas temos 23 pessoas.