EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos Prova Modelo
2001

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A Prova é constituída por dois Grupos, I e II.

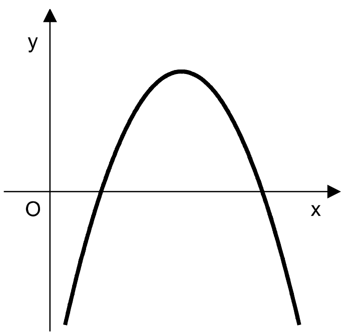
- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de doze.

Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário.

Grupo I

- As sete questões do primeiro grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Na figura está representada parte de uma parábola, que é o gráfico de uma certa função g, de domínio $\mathbb{R}$.



Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = g(x) \,.\, (x+3)^2$

Qual pode ser o conjunto dos zeros da função h?

(A) $\{2, 3, 4\}$ **(B)** $\{-3, 1, 4\}$

(C) $\{-3, 2, 3, 5\}$ **(D)** $\{-1, 5, 9\}$

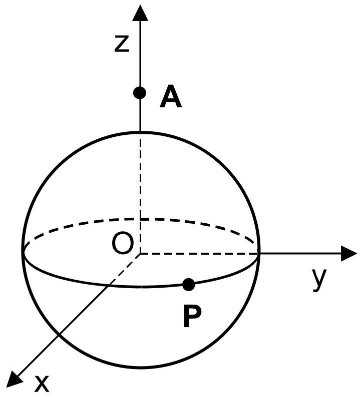
2. Indique o valor de $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{sen} x}$

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

3. Na figura estão representados, em referencial o. n. $Oxyz$:

- o ponto A, de coordenadas $(0,0,4)$
- a superfície esférica de equação $x^2+y^2+z^2=9$
- a circunferência que resulta da intersecção dessa superfície esférica com o plano xOy

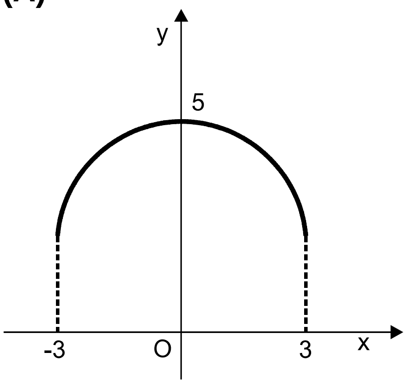
Um ponto P percorre essa circunferência, dando uma volta completa.



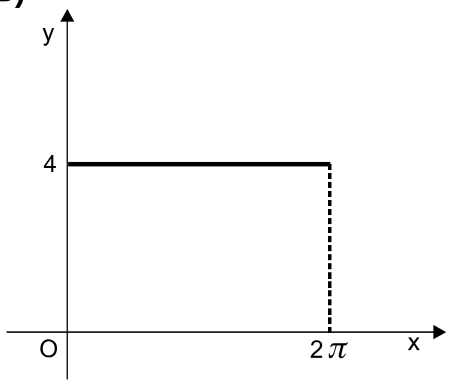
Considere a função f que faz corresponder, à **abcissa** do ponto P, a **distância** de P a A.

Qual dos seguintes é o gráfico da função f ?

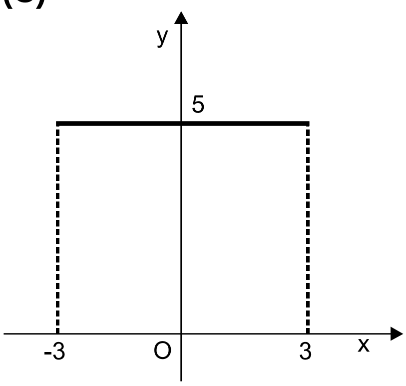
(A)



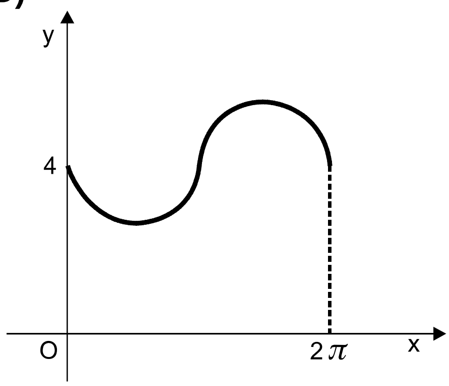
(B)



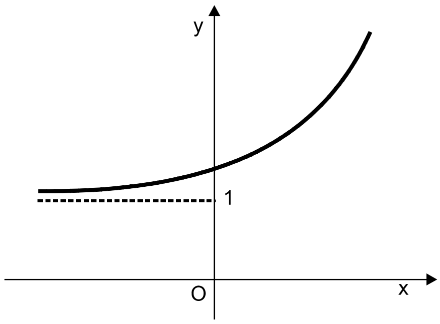
(C)



(D)

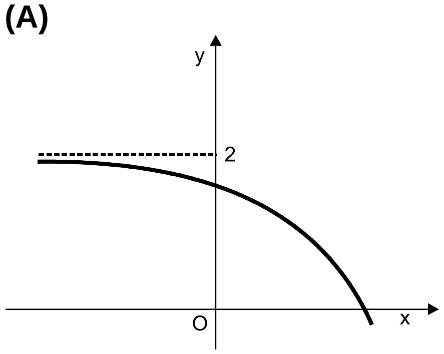


4. Na figura está parte da representação gráfica de uma certa função g, de domínio $\mathbb{R}$.

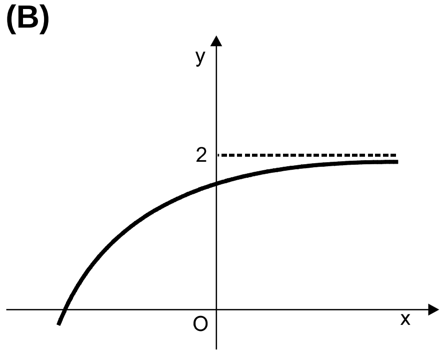


Em qual das figuras seguintes está parte da representação gráfica da função h, definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = -g(x) + 1$?

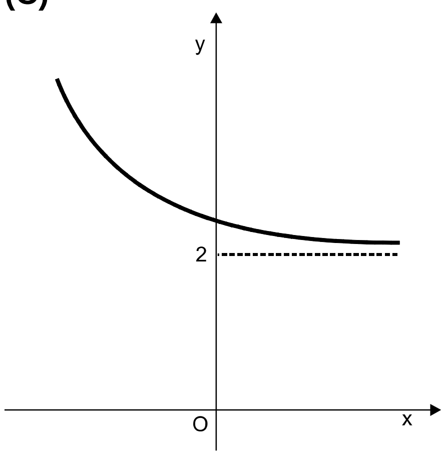
(A)



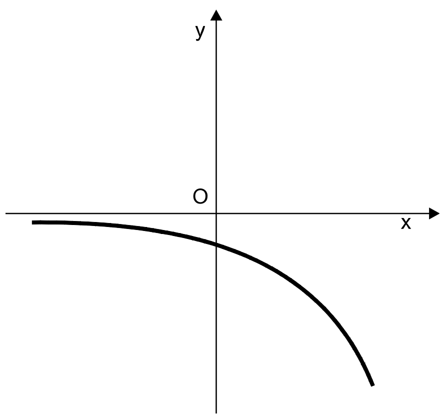
(B)



(C)



(D)



5. Admita que, numa certa escola, a variável «*altura das alunas do 12.º ano de escolaridade*» segue uma distribuição aproximadamente normal, de média 170 cm.

Escolhe-se, ao acaso, uma aluna do 12.º ano dessa escola.

Relativamente a essa rapariga, qual dos seguintes acontecimentos é o mais provável?

(A) A sua altura é superior a 180 cm.

(B) A sua altura é inferior a 180 cm.

(C) A sua altura é superior a 155 cm.

(D) A sua altura é inferior a 155 cm.

6. Seja S o conjunto de resultados (com um número finito de elementos) associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos, contidos em S, nenhum deles impossível, nem certo.

Sabe-se que $A \subset B$.

Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira (P designa probabilidade, e $\overline{A}$ e $\overline{B}$ designam os acontecimentos contrários de A e de B, respectivamente).

(A) $P(A) > P(B)$

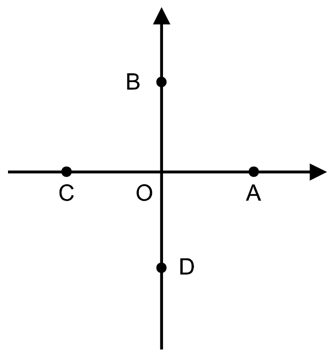
(B) $P(A \cap B) = 0$

(C) $P(A \cup B) = 1$

(D) $P(\overline{A}) \geq P(\overline{B})$

7. Seja $z = y\,i$, com $y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, um número complexo ($i$ designa a unidade imaginária).

Qual dos quatro pontos representados na figura junta (A, B, C ou D) pode ser a imagem geométrica de z^4 ?



(A) O ponto A

(B) O ponto B

(C) O ponto C

(D) O ponto D

Grupo II

Nas questões do segundo grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. O *AUTO-HEXÁGONO* é um *stand* de venda de automóveis.

1.1. Efectuou-se um estudo sobre as vendas de automóveis nesse *stand*, o qual revelou que:

- 15% dos clientes compram automóvel com alarme e com rádio;
- 20% dos clientes compram automóvel sem alarme e sem rádio;
- 45% dos clientes compram automóvel com alarme (com ou sem rádio).

Um cliente acaba de comprar um automóvel.

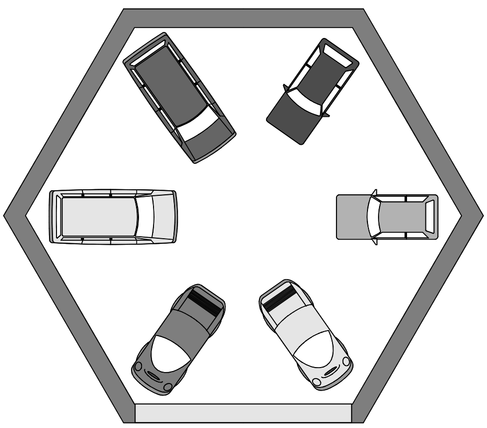
1.1.1. A Marina, empregada do *stand*, que nada sabia das preferências desse cliente e não tomou conhecimento do equipamento do automóvel que ele tinha comprado, apostou que esse automóvel estava equipado com rádio, mas não tinha alarme.
Qual é a probabilidade de a Marina acertar? Apresente o resultado na forma de percentagem.

1.1.2. Alguém informou depois a Marina de que o referido automóvel vinha equipado com alarme. Ela apostou, então, que o automóvel também tinha rádio.
Qual é a probabilidade de a Marina ganhar esta nova aposta? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

1.2. O *stand*, de forma hexagonal, tem uma montra que se situa num dos lados do hexágono (ver figura).

Pretende-se arrumar seis automóveis **diferentes** (dois utilitários, dois desportivos e dois comerciais), de tal forma que cada automóvel fique junto de um vértice do hexágono.

Supondo que se arrumam os seis automóveis ao acaso, qual é a probabilidade de os dois desportivos ficarem junto dos vértices que se encontram nas extremidades da montra? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.


Montra

2. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = 7 + 24\,i \qquad (i \text{ designa a unidade imaginária})$$

2.1. Um certo ponto P é a imagem geométrica, no plano complexo, de uma das raízes quadradas de z_1. Sabendo que o ponto P tem abcissa 4, determine a sua ordenada.

2.2. Seja $z_2 = cis\,\alpha$ com $\alpha \in \left]\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right[$

Indique, justificando, em que quadrante se situa a imagem geométrica de $z_1 \times z_2$

3. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x} & \text{se } x < 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2} & \text{se } x = 0 \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sen} x}{2\,x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

3.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes:

3.1.1. Estude a função h quanto à continuidade no ponto 0.
(Deve indicar, justificando, se a função h é contínua nesse ponto e, no caso de não ser, se se verifica a continuidade à esquerda, ou à direita, nesse mesmo ponto.)

3.1.2. Considere a função j, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por $j(x) = \dfrac{1}{3\,x}$

Mostre que, no intervalo $[-1\,,\,1000\,\pi]$, os gráficos de j e de h se intersectam em 1001 pontos.

3.2. Dos 1001 pontos referidos na alínea anterior, seja A o que tem menor abcissa positiva. Determine as coordenadas desse ponto (apresente os valores na forma de dízima, com aproximação às décimas).

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{x + 3\,\text{sen}\,\frac{x}{2}}{\ln\left(e^{x} + 4\right)}$

4.1. Sabe-se que existe $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ e que o seu valor é um número inteiro.
Recorrendo à sua calculadora, conjecture-o. Explique como procedeu.

4.2. Será conclusivo, para a determinação do valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, um método que se baseie exclusivamente na utilização da calculadora? Justifique a sua resposta.

5. Malmequeres de Baixo é uma povoação com **cinco mil** habitantes.

5.1. Num certo dia, ocorreu um acidente em Malmequeres de Baixo, que foi testemunhado por algumas pessoas. Admita que, t horas depois do acidente, o número (expresso em **milhares**) de habitantes de Malmequeres de Baixo que sabiam do ocorrido era, aproximadamente,

$$f(t) = \frac{5}{1 + 124\, e^{-0{,}3\, t}} \quad , \quad t \geq 0$$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de assimptotas do seu gráfico. Interprete as conclusões a que chegou, no contexto do problema.

5.2. Alguns dias depois, ocorreu outro acidente no mesmo local, testemunhado pelas mesmas pessoas. No entanto, neste segundo acidente, a notícia propagou-se mais depressa, no sentido em que, decorrido o mesmo tempo após o acidente, mais pessoas sabiam do ocorrido. Admita que, t horas depois deste segundo acidente, o número (expresso em **milhares**) de habitantes de Malmequeres de Baixo que sabiam do ocorrido era, aproximadamente,

$$g(t) = \frac{5}{1 + a\, e^{-b\, t}} \quad , \quad t \geq 0$$

(para certos valores de a e b).

Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, refira o que pode garantir sobre os valores de a e de b, comparando cada um deles com o valor da constante correspondente da expressão analítica de f.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 32
- **1.1.** 20
  - **1.1.1.** 10
  - **1.1.2.** 10
- **1.2.** 12

2. 21
- **2.1.** 10
- **2.2.** 11

3. 36
- **3.1.** 28
  - **3.1.1.** 12
  - **3.1.2.** 16
- **3.2.** 8

4. 16
- **4.1.** 8
- **4.2.** 8

5. 32
- **5.1.** 17
- **5.2.** 15

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\,maior \times Diagonal\,menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\,maior + Base\,menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Círculo: $\pi\, r^2$ $\quad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Prisma: *Área da base* $\times$ *Altura*

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $\quad$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\,\theta)\,.\,(\rho'\, cis\,\theta') = \rho\,\rho'\, cis\,(\theta + \theta')$

$\frac{\rho\ cis\,\theta}{\rho'\, cis\,\theta'} = \frac{\rho}{\rho'}\ cis\,(\theta - \theta')$

$(\rho\, cis\,\theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\,\frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\,v + u\,.\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\,v - u\,.\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}\,.\,u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -\,u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\,e^u$

$(a^u)' = u'.\,a^u.\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$