

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)  
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos  
2002

1.ª FASE  
1.ª CHAMADA  
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

---

**VERSÃO 1**

**Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.**

**A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.**

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui quatro questões de resposta aberta, subdivididas em alíneas, num total de onze.

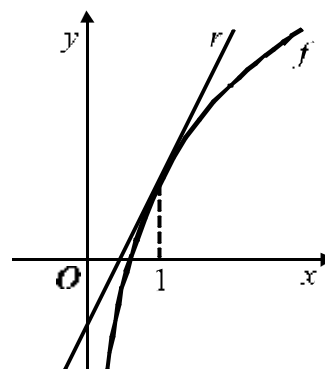
**Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.**

## Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Na figura estão representadas, num referencial o. n.  $xOy$ :

- parte do gráfico de uma função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = 1 + 2 \ln x$ .
- a recta  $r$ , tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abcissa 1



Qual é o declive da recta  $r$ ?

- (A) 1                      (B) 2                      (C) 3                      (D) 4

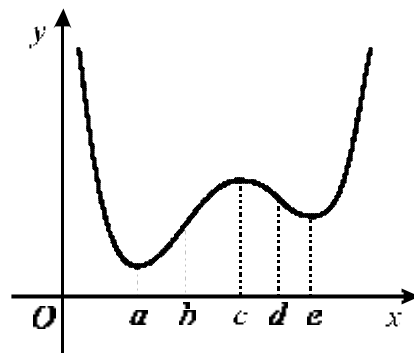
2. Seja  $h$  uma função **contínua**, de domínio  $\mathbb{R}$ .

Qual dos seguintes conjuntos **não pode** ser o contradomínio de  $h$ ?

- (A)  $\mathbb{R}$                       (B)  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$                       (C)  $\mathbb{R}^-$                       (D)  $]0,1[$

3. Na figura junta está representada parte do gráfico de uma função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ .

Numa das alternativas seguintes estão os quadros de sinais de  $f'$  e de  $f''$ , respectivamente primeira e segunda derivadas de  $f$ .



Em qual delas?

(A)

$x$		$a$		$c$		$e$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-

$x$		$b$		$d$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+

(B)

$x$		$a$		$c$		$e$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-

$x$		$b$		$d$	
$f''(x)$	-	0	+	0	-

(C)

$x$		$a$		$c$		$e$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$x$		$b$		$d$	
$f''(x)$	+	0	-	0	+

(D)

$x$		$a$		$c$		$e$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$x$		$b$		$d$	
$f''(x)$	-	0	+	0	-

4. O gráfico da função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = 0,1 + 0,2 e^{0,3x}$ , tem uma única assíntota.

Qual das condições seguintes é uma equação dessa assíntota?

- (A)  $y = 0$  (B)  $y = 0,1$   
(C)  $y = 0,2$  (D)  $y = 0,3$

5. Um saco contém cinco cartões, numerados de 1 a 5.

A Joana retira sucessivamente, ao acaso, os cinco cartões do saco e alinha-os, da esquerda para a direita, pela ordem de saída, de maneira a formar um número de cinco algarismos.

Qual é a probabilidade de esse número ser par e de ter o algarismo das dezenas também par?

- (A)  $\frac{{}^5C_2}{{}^5A_2}$  (B)  $\frac{{}^5C_2}{5!}$  (C)  $\frac{2 \times 3!}{{}^5A_2}$  (D)  $\frac{2 \times 3!}{5!}$

6. A tabela de distribuição de probabilidade de uma variável aleatória  $X$  é:

$x_i$	1	2	3
$P(X = x_i)$	$a$	$2a$	$a$

Qual é o valor de  $a$ ?

- (A)  $\frac{1}{5}$  (B)  $\frac{1}{4}$  (C)  $\frac{1}{3}$  (D)  $\frac{1}{2}$

7. Qual das seguintes condições define, no plano complexo, o eixo imaginário?

- (A)  $z + \bar{z} = 0$  (B)  $\text{Im}(z) = 1$   
(C)  $|z| = 0$  (D)  $z - \bar{z} = 0$

## Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

**Atenção:** quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Em  $\mathbb{C}$ , considere os números complexos:  $z_1 = 1 + i$  e  $z_2 = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3}{4} \pi$

1.1. Verifique que  $z_1$  e  $z_2$  são raízes quartas de um mesmo número complexo. Determine esse número, apresentando-o na forma algébrica.

1.2. Considere, no plano complexo, os pontos  $A$ ,  $B$  e  $O$  em que:

- $A$  é a imagem geométrica de  $z_1$
- $B$  é a imagem geométrica de  $z_2$
- $O$  é a origem do referencial.

Determine o perímetro do triângulo  $[AOB]$ .

2.

2.1. Seja  $S$  o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam  $A$  e  $B$  dois acontecimentos possíveis ( $A \subset S$  e  $B \subset S$ ).

Prove que

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) - P(B) + P(A|B) \times P(B)$$

( $P$  designa probabilidade,  $\overline{A}$  e  $\overline{B}$  designam os acontecimentos contrários de  $A$  e de  $B$ , respectivamente, e  $P(A|B)$  designa a probabilidade de  $A$ , se  $B$ ).

2.2. Das raparigas que moram em Vale do Rei, sabe-se que:

- a quarta parte tem olhos verdes;
- a terça parte tem cabelo louro;
- das que têm cabelo louro, metade tem olhos verdes.

2.2.1. Escolhendo aleatoriamente uma rapariga de Vale do Rei, qual é a probabilidade de ela não ser loura nem ter olhos verdes?

**Sugestão:** se lhe for útil, pode utilizar a igualdade enunciada na alínea 2.1. para resolver o problema.

2.2.2. Admita agora que em Vale do Rei moram cento e vinte raparigas.

Pretende-se formar uma comissão de cinco raparigas, para organizar um baile.

Quantas comissões diferentes se podem formar com exactamente duas raparigas louras?

- 3.** Doses terapêuticas iguais de um certo antibiótico são administradas, pela primeira vez, a duas pessoas: a Ana e o Carlos.

Admita que, durante as doze primeiras horas após a tomada simultânea do medicamento pela Ana e pelo Carlos, as concentrações de antibiótico, medidas em miligramas por litro de sangue, são dadas, respectivamente, por

$$A(t) = 4t^3 e^{-t} \quad \text{e} \quad C(t) = 2t^3 e^{-0,7t}$$

A variável  $t$  designa o tempo, medido em **horas**, que decorre desde o instante em que o medicamento é tomado ( $t \in [0, 12]$ ).

- 3.1.** Recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora para efectuar cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes.

- 3.1.1.** Determine o valor da concentração deste antibiótico no sangue da Ana, quinze **minutos** depois de ela o ter tomado. Apresente o resultado, em miligramas por litro de sangue, arredondado às centésimas.

**Nota:** sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

- 3.1.2.** No instante em que as duas pessoas tomam o medicamento, as concentrações são iguais (por serem nulas). Determine quanto tempo depois as concentrações voltam a ser iguais. Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

**Nota:** sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

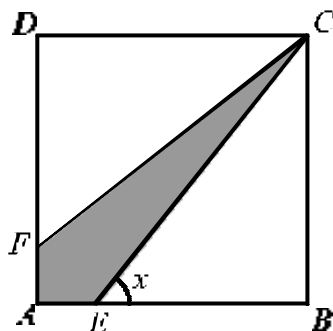
- 3.2.** Considere as seguintes questões:

- Quando a concentração ultrapassa 7,5 miligramas por litro de sangue, o medicamento pode ter efeitos secundários indesejáveis. Esta situação ocorrerá, neste caso, com alguma destas duas pessoas? Caso afirmativo, com quem? E em quantos miligramas por litro o referido limiar será ultrapassado?*
- Depois de atingir o nível máximo, a concentração começa a diminuir. Quando fica inferior a 1 miligrama por litro de sangue, é necessário tomar nova dose do medicamento. Quem deve tomá-la em primeiro lugar, a Ana ou o Carlos? E quanto tempo antes do outro?*

Utilize as capacidades gráficas da sua calculadora para investigar estas duas questões.

Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explicita as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. Apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos (coordenadas arredondadas às décimas).

4. Na figura está representado um quadrado  $[ABCD]$ , de lado 1.



O ponto  $E$  desloca-se sobre o lado  $[AB]$ , e o ponto  $F$  desloca-se sobre o lado  $[AD]$ , de tal forma que se tem sempre  $\overline{AE} = \overline{AF}$ .

Para cada posição do ponto  $E$ , seja  $x$  a amplitude do ângulo  $BEC$  ( $x \in ]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ ).

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, resolva as três alíneas seguintes:

- 4.1. Mostre que o **perímetro** do quadrilátero  $[CEAF]$  é dado, em função de  $x$ , por

$$f(x) = 2 - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + \frac{2}{\operatorname{sen} x}$$

- 4.2. Calcule  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)$  e interprete geometricamente o valor obtido.

- 4.3. Mostre que  $f'(x) = \frac{2 - 2 \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$  e estude a função  $f$  quanto à monotonia.

**FIM**



## COTAÇÕES

**Grupo I ..... 63**

Cada resposta certa .....	+9
Cada resposta errada.....	- 3
Cada questão não respondida ou anulada .....	0

**Nota:** um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

**Grupo II ..... 137**

**1. .... 21**

1.1. ....	11
1.2. ....	10

**2. .... 32**

2.1. ....	11
2.2. ....	21
2.2.1. ....	11
2.2.2. ....	10

**3. .... 43**

3.1. ....	27
3.1.1. ....	13
3.1.2. ....	14
3.2. ....	16

**4. .... 41**

4.1. ....	13
4.2. ....	12
4.3. ....	16

**TOTAL ..... 200**



## Formulário

### Áreas de figuras planas

$$\text{Losango: } \frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$$

$$\text{Trapézio: } \frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$$

$$\text{Polígono regular: } \text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$$

$$\text{Círculo: } \pi r^2 \quad (r - \text{raio})$$

### Áreas de superfícies

$$\text{Área lateral de um cone: } \pi r g \\ (r - \text{raio da base; } g - \text{geratriz})$$

$$\text{Área de uma superfície esférica: } 4 \pi r^2 \\ (r - \text{raio})$$

### Volumes

$$\text{Prisma: } \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Cilindro: } \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Pirâmide: } \frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Cone: } \frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Esfera: } \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (r - \text{raio})$$

### Trigonometria

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$$

$$\text{cos}(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$$

$$\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

### Complexos

$$(\rho \text{ cis } \theta) \cdot (\rho' \text{ cis } \theta') = \rho \rho' \text{ cis } (\theta + \theta')$$

$$\frac{\rho \text{ cis } \theta}{\rho' \text{ cis } \theta'} = \frac{\rho}{\rho'} \text{ cis } (\theta - \theta')$$

$$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis } (n\theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{ cis } \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \{0, \dots, n-1\}$$

### Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma

$$\text{Prog. Aritmética: } \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$

$$\text{Prog. Geométrica: } u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

### Regras de derivação

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\text{sen } u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\text{cos } u)' = -u' \cdot \text{sen } u$$

$$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

### Limites notáveis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$