

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos
2002

1.ª FASE
1.ª CHAMADA

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I 63

Cada resposta certa +9
Cada resposta errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II 137

1. 21
 1.1. 11
 1.2. 10

2. 32
 2.1. 11
 2.2. 21
 2.2.1. 11
 2.2.2. 10

3. 43
 3.1. 27
 3.1.1. 13
 3.1.2. 14
 3.2. 16

4. 41
 4.1. 13
 4.2. 12
 4.3. 16

TOTAL 200

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

Pode acontecer que o examinando não respeite a indicação, expressa no enunciado, de que deverá escrever apenas a letra correspondente à alternativa seleccionada. Por exemplo: pode acontecer que ele apresente cálculos; pode acontecer que escreva, para além da letra, a resposta que lhe corresponde; pode acontecer que se esqueça de escrever a letra e escreva apenas a resposta; etc. Deverão ser consideradas (como certas ou como erradas) todas as questões em que não haja qualquer dúvida sobre a alternativa que o examinando seleccionou, mesmo que, formalmente, desrespeitem a referida indicação. Deverão ser anuladas todas as questões onde existam dúvidas sobre a alternativa seleccionada.

As respostas certas são as seguintes:

| Questões | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|----------|---|---|---|---|---|---|---|
| Versão 1 | B | B | C | B | D | B | A |
| Versão 2 | C | C | B | A | C | D | D |

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

| Resp. erradas Resp. certas | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------------------------------|----|----|----|----|----|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 9 | 6 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 2 | 18 | 15 | 12 | 9 | 6 | 3 | | |
| 3 | 27 | 24 | 21 | 18 | 15 | | | |
| 4 | 36 | 33 | 30 | 27 | | | | |
| 5 | 45 | 42 | 39 | | | | | |
| 6 | 54 | 51 | | | | | | |
| 7 | 63 | | | | | | | |

Grupo II

Critérios gerais

1. A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro, não negativo, de pontos.
2. Se, numa alínea em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, o examinando se limitar a apresentar o resultado final, deverão ser atribuídos zero pontos a essa alínea.
3. Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.
4. Existem alíneas cuja cotação está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para as resolver.
 - Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.
 - Caso a resolução da etapa esteja incompleta, ou contenha incorrecções, cabe ao classificador decidir a cotação a atribuir a essa etapa, tendo em conta o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
 - erros de contas ocasionais devem ser penalizados em um ponto;
 - erros graves, que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades, devem ser penalizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa.
 - No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.
 - Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.
 - Pode acontecer que o examinando, ao resolver uma questão, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.
5. Existem alíneas em que estão previstos alguns erros que o examinando pode cometer. Para cada caso, é indicada a cotação a atribuir. O examinando pode, contudo, utilizar um processo não contemplado nos critérios e/ou cometer um erro não previsto. Cabe ao classificador adaptar as referências dadas a todas as situações não previstas.
6. Se, na resolução de uma alínea, o examinando utilizar simbologia inequivocamente incorrecta (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), tal deve ser penalizado em um ponto, na cotação total a atribuir a essa alínea.

Critérios específicos

1.1.11

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, cinco processos:

1.º Processo

$$z_1^4 = -4 \text{ (cálculo efectuado na forma algébrica)7}$$

$$z_2^4 = 4cis(3\pi) \text{2}$$

Conclusão2

2.º Processo

$$|z_1| = \sqrt{2} \text{2}$$

Determinar um argumento de z_1 (por exemplo, $\frac{\pi}{4}$)2

$$z_1^4 = 4cis\pi \text{2}$$

$$z_2^4 = 4cis(3\pi) \text{2}$$

$$4cis\pi = 4cis(3\pi) = -4 \text{3 (1+2)}$$

3.º Processo

$$|z_1| = \sqrt{2} \text{2}$$

Determinar um argumento de z_1 (por exemplo, $\frac{\pi}{4}$)2

Conclusão (como $|z_1| = |z_2|$ e $\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$,

z_1 e z_2 são raízes quartas de um mesmo número complexo)3

Número pedido = -4 4

4.º Processo

$$z_2^4 = 4cis(3\pi) \text{2}$$

Escrever a expressão geradora das raízes quartas de z_2^4 2

Verificar que z_1 é uma das raízes5

$$4cis(3\pi) = -4 \text{2}$$

5.º Processo

Evidenciar que as representações geométricas de z_1 e de z_2 são vértices de um quadrado de centro na origem, pelo que z_1 e

z_2 são raízes quartas de um mesmo número complexo7

Número pedido = -4 4

1.2.10

Indicar os comprimentos dos lados do triângulo9 (3 × 3)

Perímetro do triângulo $= 2 + 2\sqrt{2}$1

Notas:

1. Não se exige o desenho do triângulo cujo perímetro é pedido.
2. Se o examinando se limitar a esboçar correctamente o triângulo, deverão ser atribuídos 4 pontos à sua resposta.

2.1.11

O examinando deve utilizar

- Leis de De Morgan
- Propriedade relativa à probabilidade do acontecimento contrário
- Propriedade relativa à probabilidade da união de dois acontecimentos
- $P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$

e deve concluir que

- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) - P(B) + P(A|B) \times P(B)$

Na tabela seguinte, indica-se como esta alínea deve ser cotada:

| Conteúdo | Forma | Nível 1 (*) | Nível 2 (**) |
|---------------------------------------------------------------------|-------|----------------|-----------------|
| O examinando utiliza as quatro propriedades e conclui o pretendido. | | 11 | 10 |
| O examinando utiliza as quatro propriedades, mas não conclui. | | 8 | 7 |
| O examinando utiliza apenas três propriedades. | | 6 | 5 |
| O examinando utiliza apenas duas propriedades. | | 4 | 3 |
| O examinando utiliza apenas uma propriedade. | | 2 | 1 |

(*) **Nível 1** - Resposta bem estruturada e correcta do ponto de vista formal.

(**) **Nível 2** - Resposta mal estruturada e/ou com alguns erros formais.

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, quatro processos:

No que se segue, vamos designar por A o acontecimento «ter olhos verdes» e por B o acontecimento «ter cabelo louro».

Como é evidente, o examinando poderá escolher outras designações.

1.º Processo

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| $P(A) = \frac{1}{4}$ | 1 |
| $P(B) = \frac{1}{3}$ | 1 |
| $P(A B) = \frac{1}{2}$ | 2 |
| $P(\bar{A}) = \frac{3}{4}$ | 1 |
| Aplicar a fórmula ($P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$)..... | 4 |
| $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{7}{12}$ | 2 |

2.º Processo

| | |
|------------------------------------------------|---|
| $P(A) = \frac{1}{4}$ | 1 |
| $P(B) = \frac{1}{3}$ | 1 |
| $P(A B) = \frac{1}{2}$ | 2 |
| $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ | 2 |
| $P(A \cup B) = \frac{5}{12}$ | 3 |
| $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{7}{12}$ | 2 |

Nota:

Neste processo, o examinando pode utilizar um diagrama de Venn.

3.º Processo

(Através de uma tabela)

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------|---|
| Preencher a célula relativa a $P(A)$ com o valor $\frac{1}{4}$ | 1 |
| Preencher a célula relativa a $P(B)$ com o valor $\frac{1}{3}$ | 1 |
| Obter o valor $\frac{1}{6}$, da célula relativa a $P(A \cap B)$ | 4 |
| Obter o valor $\frac{7}{12}$, da célula relativa a $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ | 5 |

4.º Processo

(Através de um diagrama em árvore)

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------|---|
| Preencher o ramo relativo a $P(B)$ com o valor $\frac{1}{3}$ | 1 |
| Preencher o ramo relativo a $P(A B)$ com o valor $\frac{1}{2}$ | 2 |
| Obter o valor $\frac{1}{6}$, do ramo relativo a $P(A \cap B)$ | 3 |
| Obter o valor $\frac{7}{12}$, do ramo relativo a $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ | 5 |

2.2.2.10

| | |
|----------------------------------------------------------------|---|
| Número de raparigas com cabelos louros = 40 | 2 |
| Número pedido = ${}^{40}C_2 \times {}^{80}C_3$ (ver nota)..... | 7 |
| Número pedido = 64084800 | 1 |

Nota:

Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, com a respectiva cotação a atribuir.

| | |
|-------------------------------------------------------|---|
| ${}^{40}C_2 \times {}^{80}C_3$ (número correcto)..... | 7 |
| ${}^{40}A_2 \times {}^{80}A_3$ | 2 |

3.1.1.13

| | |
|------------------------------------------------------------|---|
| Identificar o pedido com $A\left(\frac{1}{4}\right)$ | 7 |
| $A\left(\frac{1}{4}\right) \approx 0,05$ (ver nota) | 6 |

Nota:

Se o examinando não apresentar o resultado arredondado às centésimas, ou se o arredondamento estiver incorrecto, deverá ser penalizado em 1 ponto.

3.1.2.14

| | |
|--------------------------------------------------------------|---|
| Equacionar o problema ($4t^3e^{-t} = 2t^3e^{-0,7t}$) | 3 |
|--------------------------------------------------------------|---|

$$4t^3e^{-t} = 2t^3e^{-0,7t} \Leftrightarrow e^{-0,3t} = \frac{1}{2} \quad (\text{para } t > 0)$$

ou

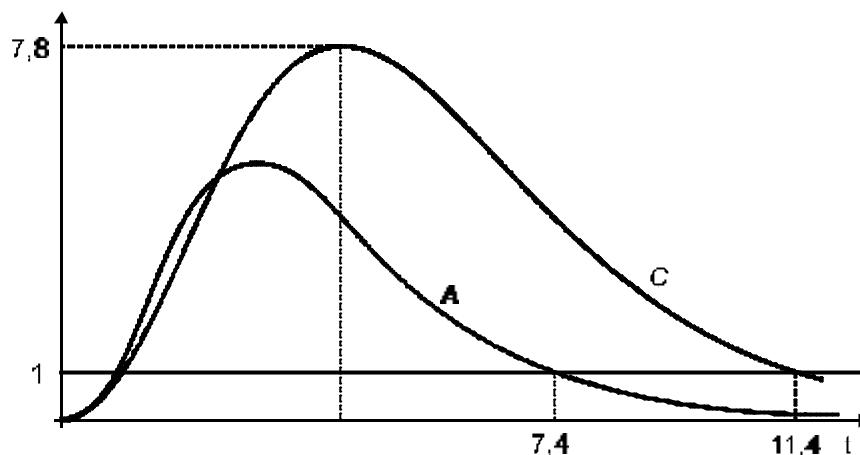
$$4t^3e^{-t} = 2t^3e^{-0,7t} \Leftrightarrow t = 0 \vee e^{-0,3t} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots 5$$

$$\text{Tempo pedido} = \frac{\ln(1/2)}{-0,3} \quad \dots\dots\dots 3$$

$$\text{Tempo pedido} \approx 2,31 \quad \dots\dots\dots 1$$

$$\text{Tempo pedido} \approx 2 \text{ h } 19 \text{ m} \quad \dots\dots\dots 2$$

Apresenta-se a seguir um exemplo de resposta.



O nível máximo de concentração do antibiótico no sangue do Carlos ultrapassa, em 0,3 miligramas por litro de sangue, o limiar a partir do qual o medicamento pode causar efeitos secundários. De facto, como se pode concluir da análise do gráfico da função *C*, o nível máximo de concentração do medicamento no sangue do Carlos é de 7,8 miligramas por litro.

Por simples observação dos gráficos, verifica-se claramente que, no caso da Ana, essa situação não ocorre.

A partir das abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos com a recta de equação $y = 1$, pode concluir-se que a Ana deve tomar nova dose do medicamento cerca de 7,4 horas depois de ter tomado a primeira, enquanto o Carlos deverá fazê-lo 4 horas depois, ou seja, 11,4 horas depois de ter tomado a sua primeira dose.

Esta alínea deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Apresentação da informação recolhida na utilização da calculadora (ver nota 1) | 6 |
| Composição (ver notas 2 e 3) | 10 |

Notas:

1. Indica-se a seguir como deve ser cotada a apresentação da informação recolhida na utilização da calculadora:

- O examinando reproduz os gráficos obtidos na calculadora e indica as coordenadas relevantes para responder às duas questões colocadas6
- O examinando reproduz os gráficos obtidos na calculadora e indica as coordenadas relevantes para responder a uma das questões colocadas4
- O examinando limita-se a reproduzir os gráficos obtidos na calculadora2

2. Na tabela seguinte, indica-se como deve ser cotada a composição.

| Conteúdo | Forma | Nível 1 (*) | Nível 2 (**) | Nível 3 (***) |
|---------------------------------------------------|-------|----------------|-----------------|------------------|
| Analisa correctamente as duas questões colocadas. | | 10 | 8 | 6 |
| Analisa correctamente apenas a segunda questão. | | 6 | 5 | 4 |
| Analisa correctamente apenas a primeira questão. | | 4 | 3 | 2 |

(*) **Nível 1** - Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

(**) **Nível 2** - Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecte a inteligibilidade.

(***) **Nível 3** - Redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade.

Pode acontecer que uma composição não se enquadre completamente num dos três níveis descritos e/ou contenha características presentes em mais do que um deles. Nesse caso, deverá ser atribuída uma pontuação intermédia, desde que respeite a indicação, dada nos critérios gerais, de que a cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

3. Pode acontecer que o examinando se engane a introduzir a expressão das funções na calculadora. Nestas circunstâncias, cabe ao classificador adaptar as indicações dadas na tabela acima, tendo em conta os seguintes parâmetros:

- plausibilidade dos gráficos obtidos, face à situação em estudo;
- correcção matemática das afirmações produzidas, face aos gráficos obtidos.

4.1.13

O examinando deve

- Mostrar que $\overline{CE} = \frac{1}{\text{sen } x}$
- Mostrar que $\overline{EB} = \frac{1}{\text{tg } x}$
- Evidenciar que $\overline{AE} = 1 - \overline{EB}$
- Evidenciar que o perímetro pedido é igual a $2 \times \overline{AE} + 2 \times \overline{CE}$

e deve concluir que $f(x) = 2 - \frac{2}{\text{tg } x} + \frac{2}{\text{sen } x}$

Na tabela seguinte, indica-se como esta alínea deve ser cotada:

| Conteúdo | Forma | Nível 1 (*) | Nível 2 (**) |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-------|----------------|-----------------|
| O examinando percorre as quatro etapas e conclui o pretendido. | | 13 | 12 |
| O examinando percorre as quatro etapas, mas não conclui o pretendido. | | 11 | 10 |
| O examinando percorre apenas três etapas, não podendo, portanto, concluir o pretendido. | | 8 | 7 |
| O examinando percorre apenas duas etapas, não podendo, portanto, concluir o pretendido. | | 5 | 4 |
| O examinando percorre apenas uma etapa, não podendo, portanto, concluir o pretendido. | | 2 | 1 |

(*) **Nível 1** - Resposta bem estruturada e correcta do ponto de vista formal.

(**) **Nível 2** - Resposta mal estruturada e/ou com alguns erros formais.

4.2.12

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = 4$ | 7 |
| $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{2}{\operatorname{tg} x} = 0$ (ver nota 1) | 4 |
| $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{2}{\operatorname{sen} x} = 2$ (ver nota 2) | 2 |
| Conclusão | 1 |

Interpretação (ver nota 3).....5

Notas:

1. Se o examinando não explicitar este passo, estes 4 pontos não devem ser atribuídos.
2. Se o examinando não explicitar este passo, estes 2 pontos não devem ser atribuídos.

3. A interpretação deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

Interpretação correcta, utilizando uma linguagem correcta (Exemplo: quando $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, o quadrilátero tende a coincidir com o quadrado $[ABCD]$, pelo que o seu perímetro tende para o perímetro do quadrado)5

Interpretação com incorrecções de linguagem (Exemplo: a figura tende para o perímetro do quadrado)3

Interpretação incorrecta (Inclui-se o caso em que o examinando obtém, para o limite, um valor menor ou igual a zero, ou infinito, e tenta interpretá-lo)0

4.3.16

$$\left(\frac{2}{\operatorname{tg} x}\right)' = \frac{-2}{\cos^2 x \operatorname{tg}^2 x} \dots\dots\dots 2$$

$$\left(\frac{2}{\operatorname{sen} x}\right)' = \frac{-2 \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \dots\dots\dots 2$$

Mostrar que $f'(x) = \frac{2 - 2 \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \dots\dots\dots 4$

Referir que $f'(x) > 0$ (ver notas 1 e 2)4

Concluir que a função f é crescente (ver nota 1)4

Notas:

1. A análise do sinal de f' e a conclusão podem ser apresentadas através de um quadro.
2. Se, no quadro, o examinando não indicar correctamente o domínio da função, deverá ser penalizado em 2 pontos.