EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos - Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos
2002

1.ª FASE
2.ª CHAMADA
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, **I** e **II**.

- O Grupo **I** inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo **II** inclui cinco questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de onze.

Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

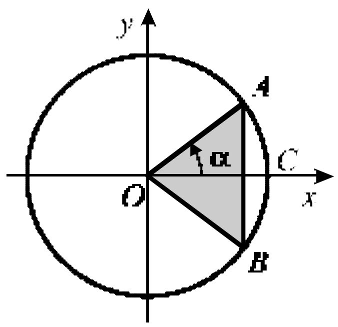
- $f(5)=0$
- f é uma função par

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=f(x+3)$.

Qual dos seguintes pode ser o conjunto dos zeros de g?

(A) $\{0,3\}$ **(B)** $\{3,5\}$ **(C)** $\{-8,2\}$ **(D)** $\{2,8\}$

2. Na figura estão representados, em referencial o. n. xOy, o círculo trigonométrico e um triângulo $[OAB]$.



Os pontos A e B pertencem à circunferência.

O segmento $[AB]$ é perpendicular ao semieixo positivo Ox.

O ponto C é o ponto de intersecção da circunferência com o semieixo positivo Ox.

Seja α a amplitude do ângulo COA. $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

Qual das expressões seguintes dá a área do triângulo $[OAB]$, em função de α?

(A) $\operatorname{sen}\alpha \,.\, \cos\alpha$

(B) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha \,.\, \cos\alpha}{2}$

(C) $\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{sen}\alpha$

(D) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{sen}\alpha}{2}$

3. De uma função h, de domínio $\mathbb{R}^{-}$, sabe-se que a recta de equação $y=2$ é assimptota do seu gráfico.

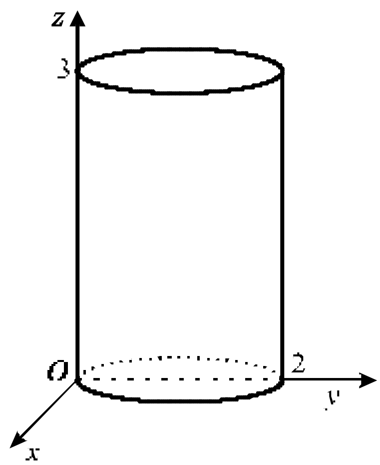
Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{h(x)}{e^{x}}$?

(A) $+\infty$ **(B)** $-\infty$ **(C)** 0 **(D)** 2

4. Na figura está representado, em referencial o. n. $Oxyz$, um cilindro de revolução.

Tem-se que:

- a altura do cilindro é 3
- uma das bases está contida no plano xOy, sendo o seu centro o ponto $(0,1,0)$ e o seu raio igual a 1



Seja $b \in \,]0,2[$ e seja f a função que, a cada valor de b, faz corresponder o perímetro da secção produzida no cilindro pelo plano de equação $y=b$.

Qual é o máximo da função f ?

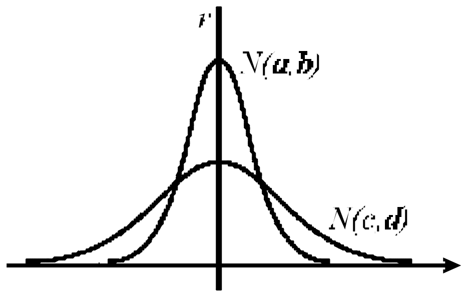
(A) 9 **(B)** 10 **(C)** 11 **(D)** 12

5. Na figura estão representados os gráficos de duas distribuições normais.

Uma das distribuições tem valor médio a e desvio padrão b.

A outra distribuição tem valor médio c e desvio padrão d.

Os gráficos são simétricos em relação à mesma recta r.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $a=c$ e $b>d$ **(B)** $a=c$ e $b<d$

(C) $a>c$ e $b=d$ **(D)** $a<c$ e $b=d$

6. O João utiliza, por vezes, o autocarro para ir de casa para a escola.

Seja A o acontecimento: «O João vai de autocarro para a escola».
Seja B o acontecimento: «O João chega atrasado à escola».

Uma das igualdades abaixo indicadas traduz a seguinte afirmação: «*Metade dos dias em que vai de autocarro para a escola, o João chega atrasado*».

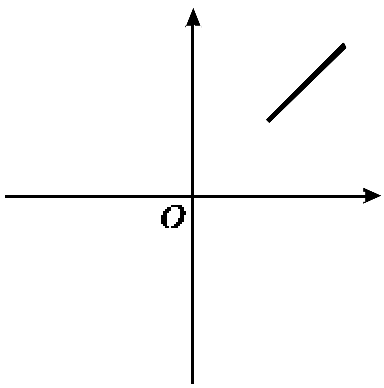
Qual é essa igualdade?

(A) $P(A \cap B) = 0{,}5$ **(B)** $P(A \cup B) = 0{,}5$

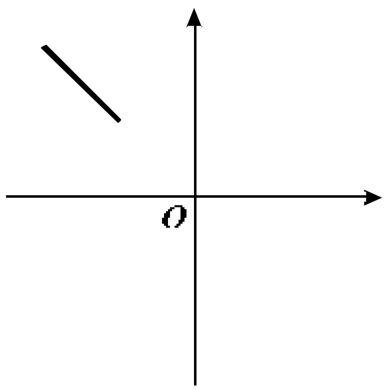
(C) $P(A|B) = 0{,}5$ **(D)** $P(B|A) = 0{,}5$

7. Qual das figuras seguintes pode ser a representação geométrica, no plano complexo, do conjunto $\{ z \in \mathbb{C} : |z+1| = |z-i| \quad \wedge \quad 2 \leq Im(z) \leq 4 \}$?

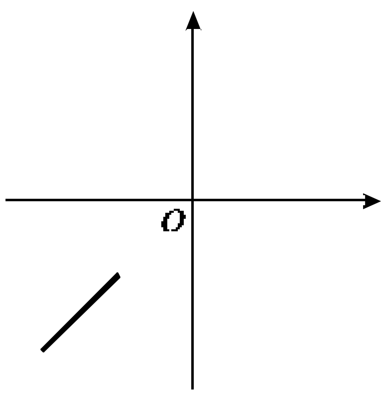
(A)



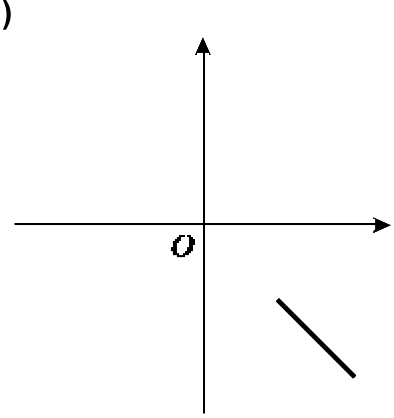
(B)



(C)



(D)



Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. De dois números complexos z_1 e z_2 sabe-se que:

• um argumento de z_1 é $\dfrac{\pi}{3}$

• o módulo de z_2 é 4

1.1. Seja $w = \dfrac{-1+i}{i}$

Justifique que w é diferente de z_1 e de z_2

1.2. z_1 e z_2 são duas das raízes quartas de um certo número complexo z.

Sabendo que, no plano complexo, a imagem geométrica de z_2 pertence ao segundo quadrante, determine z_2 na forma algébrica.

2. O **nível** N de um som, medido em decibéis, é função da sua **intensidade** I, medida em watt por metro quadrado, de acordo com a igualdade

$$N = 10\ \log_{10}\left(10^{12}\, I\right)\ , \quad \text{para} \quad I > 0$$

Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes.

2.1. Verifique que $N = 120 + 10\ \log_{10} I$

2.2. Admita que o nível de ruído de um avião a jacto, ouvido por uma pessoa que se encontra na varanda de um aeroporto, é de 140 decibéis.

Determine a intensidade desse som, em watt por metro quadrado.

3. De uma função f, de domínio $[-\pi, \pi]$, sabe-se que a sua **derivada** f' está definida igualmente no intervalo $[-\pi, \pi]$ eé dada por

$$f'(x) = x + 2\cos x$$

3.1. Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes:

3.1.1. Determine o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$

3.1.2. Estude a função f quanto às concavidades do seu gráfico e determine as abcissas dos pontos de inflexão.

3.2. O gráfico de f contém um único ponto onde a recta tangente é paralela ao eixo Ox. Recorrendo à sua calculadora, determine um valor arredondado às centésimas para a abcissa desse ponto.

Explique como procedeu.

4. Seja f uma função contínua, de domínio $[0,5]$ e contradomínio $[3,4]$.

Seja g a função, de domínio $[0,5]$, definida por $g(x) = f(x) - x$.

Prove que a função g tem, pelo menos, um zero.

5. Considere todos os números de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9.

5.1. Escolhe-se, ao acaso, um desses números.

5.1.1. Determine a probabilidade de o número escolhido ter exactamente dois algarismos iguais a 1. Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

5.1.2. Determine a probabilidade de o número escolhido ter os algarismos todos diferentes e ser maior do que 9800. Apresente o resultado na forma de dízima, com três casas decimais.

5.2. Considere o seguinte problema:

«*De todos os números de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9, alguns deles cumprem as três condições seguintes:*

- *começam por 9;*
- *têm os algarismos todos diferentes;*
- *a soma dos quatro algarismos é par.*

Quantos são esses números?»

Uma resposta correcta a este problema é $3 \times 4 \times {}^{4}A_2 + {}^{4}A_3$

Numa pequena composição, com cerca de vinte linhas, explique porquê.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada.. - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
1.1. 10
1.2. 11

2. 28
2.1. 13
2.2. 15

3. 41
3.1. 26
3.1.1. 10
3.1.2. 16
3.2. 15

4. 15

5. 32
5.1. 16
5.1.1. 8
5.1.2. 8
5.2. 16

TOTAL **200**

Formulário

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal maior \times Diagonal menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base maior + Base menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Círculo: $\pi r^2 \qquad (r - raio)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
$(r - \text{raio da base};\ g - \text{geratriz})$

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$
$(r - raio)$

Volumes

Prisma: $\text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cilindro: $\text{Área da base} \times \text{Altura}$

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3 \qquad (r - raio)$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a . \cos b + \operatorname{sen} b . \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a . \cos b - \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a . \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \, cis \theta) . (\rho' \, cis \, \theta') = \rho \rho' cis (\theta + \theta')$

$\frac{\rho \; cis \, \theta}{\rho' \; cis \, \theta'} = \frac{\rho}{\rho'} \; cis (\theta - \theta')$

$(\rho \, cis \theta)^n = \rho^n \, cis (n \theta)$

$\sqrt[n]{\rho \, cis \theta} = \sqrt[n]{\rho} \; cis \frac{\theta + 2 k \pi}{n} \; , k \in \{0, \ldots, n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u' . v + u . v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' . v - u . v'}{v^2}$

$(u^n)' = n . u^{n-1} . u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' . \cos u$

$(\cos u)' = - u' . \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' . e^u$

$(a^u)' = u' . a^u . \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u . \ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = + \infty \qquad (p \in \mathbb{R})$