EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos — 2.ª FASE
2002

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada .... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota:
Um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
- **1.1.** 10
- **1.2.** 11

2. 49
- **2.1.** 33
  - **2.1.1.** 16
  - **2.1.2.** 17
- **2.2.** 16

3. 27
- **3.1.** 10
- **3.2.** 17

4. 10

5. 30
- **5.1.** 15
- **5.2.** 15

TOTAL **200**

V.S.F.F.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

Pode acontecer que o examinando não respeite a indicação, expressa no enunciado, de que deverá escrever apenas a letra correspondente à alternativa seleccionada. Por exemplo: pode acontecer que ele apresente cálculos; pode acontecer que escreva, para além da letra, a resposta que lhe corresponde; pode acontecer que se esqueça de escrever a letra e escreva apenas a resposta; etc. Deverão ser consideradas (como certas ou como erradas) todas as questões em que não haja qualquer dúvida sobre a alternativa que o examinando seleccionou, mesmo que, formalmente, desrespeitem a referida indicação. Deverão ser anuladas todas as questões onde existam dúvidas sobre a alternativa seleccionada.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Versão 1	C	B	A	A	C	D	B
Versão 2	A	C	B	C	D	C	D

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas / **Resp. certas**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

Grupo II

Critérios gerais

1. A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro, não negativo, de pontos.

2. Se, numa alínea em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, o examinando se limitar a apresentar o resultado final, deverão ser atribuídos zero pontos a essa alínea.

3. Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

4. Existem alíneas cuja cotação está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para as resolver.
   - Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.
   - Caso a resolução da etapa esteja incompleta, ou contenha incorrecções, cabe ao classificador decidir a cotação a atribuir a essa etapa, tendo em conta o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
     - erros de contas ocasionais devem ser penalizados em um ponto;
     - erros graves, que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades, devem ser penalizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa.
   - No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.
   - Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.
   - Pode acontecer que o examinando, ao resolver uma questão, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

5. Existem alíneas em que estão previstos alguns erros que o examinando pode cometer. Para cada caso, é indicada a cotação a atribuir. O examinando pode, contudo, utilizar um processo não contemplado nos critérios e/ou cometer um erro não previsto. Cabe ao classificador adaptar as referências dadas a todas as situações não previstas.

6. Se, na resolução de uma alínea, o examinando utilizar simbologia inequivocamente incorrecta (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), tal deve ser penalizado em um ponto, na cotação total a atribuir a essa alínea.

V.S.F.F.

Critérios específicos

1.1. .... **10**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Escrever a igualdade $(1+i)^2 + b(1+i) + c = 0$ 2

Mostrar que $b = -2 \wedge c = 2$ 8

$$(1+i)^2 + b(1+i) + c = 0$$

$\Leftrightarrow 2i + b(1+i) + c = 0$ 2

$\Leftrightarrow b + c + (b+2)i = 0$ 2

$\Leftrightarrow b + c = 0 \wedge b + 2 = 0$ 2

$\Leftrightarrow b = -2 \wedge c = 2$ 2

2.º Processo:

$x^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4c}}{2}$ 1

Concluir que $\dfrac{-b}{2} = 1$ e que $\dfrac{\sqrt{b^2-4c}}{2} = i$ 2

Concluir que $b = -2$ e que $c = 2$ .... 7 (1+6)

1.2. .... **11**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º Processo:

Referir que um argumento de z_1 é $\dfrac{\pi}{4}$ 2

Concluir que um argumento de $\overline{z_2}$ é, por exemplo, $\dfrac{3\pi}{4}$ 4

Concluir que $\alpha = \dfrac{5\pi}{4}$ **(ver nota)** 5

Nota:

Se o examinando escrever $\alpha = -\dfrac{3\pi}{4}$, em vez de $\alpha = \dfrac{5\pi}{4}$, deverá ser penalizado em 3 dos 5 pontos previstos para este passo.

2.º Processo:

$z_1 = \sqrt{2}\, cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 2

$\overline{z_2} = cis(-\alpha)$ 1

$z_1 \times \overline{z_2} = \sqrt{2}\, cis\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ 2

$\frac{\pi}{4} - \alpha = \pi + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$ **(ver nota)** 3

$\alpha = \frac{5\pi}{4}$ **(ver nota)** 3

Nota:
Se o examinando escrever $\frac{\pi}{4} - \alpha = \pi$, em vez de $\frac{\pi}{4} - \alpha = \pi + 2k\pi$, e daí concluir que $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$, deverá ser penalizado em 3 dos 6 pontos previstos para estes dois passos, a menos que adicione 2π a $-\frac{3\pi}{4}$, de forma a obter a solução correcta.

3.º Processo:

$\overline{z_2} = \cos\alpha - i\,\mathrm{sen}\,\alpha$ 1

$z_1 \times \overline{z_2} = (\cos\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha) + i\,(\cos\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha)$ 2

$\cos\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha < 0 \ \wedge\ \cos\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha = 0$ .... 3 (1+2)

$\alpha = \frac{5\pi}{4}$ **(ver nota)** 5

Nota:
Se o examinando escrever $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$, em vez de $\alpha = \frac{5\pi}{4}$, deverá ser penalizado em 3 dos 5 pontos previstos para este passo.

V.S.F.F.

2.1.1. .... **16**

Justificar a não existência de assimptotas verticais (pelo facto de f ser uma função contínua em $\mathbb{R}$) 3

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ 4

Concluir que o gráfico de f não tem assimptota horizontal, quando $x \to -\infty$ 2

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{3}$ 4

Concluir que a recta de equação $y = \frac{1}{3}$ é assimptota horizontal do gráfico de f, quando $x \to +\infty$ 3

2.1.2. .... **17**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Neste processo, usa-se a informação dada no enunciado de que a solução da equação é da forma $\ln(ke)$.

Calcular $g(\pi)$ 2

$\frac{1}{3} + 2e^{1-x} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} + 2e^{1-\ln(ke)} = 1$ 2

$\Leftrightarrow e^{1-\ln(ke)} = \frac{1}{3}$ 2

$\Leftrightarrow \frac{e}{ke} = \frac{1}{3}$ **(ver nota)** 9

$\Leftrightarrow k = 3$ 2

Nota:

O examinando pode obter esta igualdade, a partir da anterior, por aplicação da propriedade $e^{a-b} = e^a / e^b$, ou por aplicação da função logaritmo a ambos os membros da igualdade anterior. Neste último caso, estes 9 pontos deverão ser distribuídos da seguinte forma:

$1 - \ln(k\,e) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$ 3

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{e}{k\,e}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$ 4

$\Leftrightarrow \frac{e}{k\,e} = \frac{1}{3}$ 2

2.º Processo:

Calcular $g(\pi)$ 2

Resolver a equação $\frac{1}{3} + 2e^{1-x} = 1$ 9

$\frac{1}{3} + 2e^{1-x} = 1$

$\Leftrightarrow e^{1-x} = \frac{1}{3}$ 2

$\Leftrightarrow 1 - x = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$ 5

$\Leftrightarrow x = 1 - \ln\left(\frac{1}{3}\right)$ 2

Apresentar a solução na forma $\ln(k\,e)$ 6

$x = 1 + \ln(3)$ 2

$x = \ln(e) + \ln(3)$ 2

$x = \ln(3e)$ 2

ou

$x = \ln(e) - \ln\left(\frac{1}{3}\right)$ 2

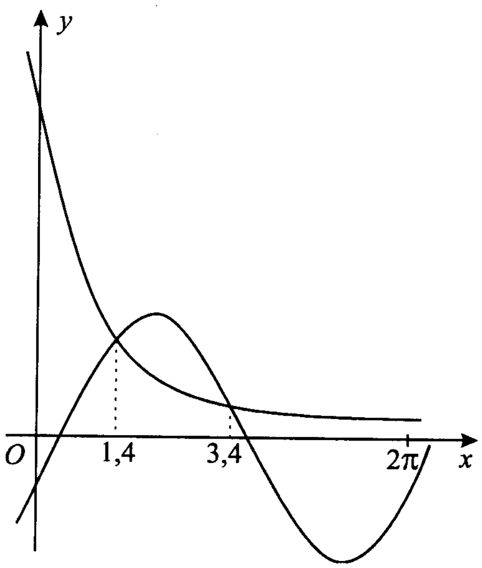
$x = \ln\left(\frac{e}{1/3}\right)$ 3

$x = \ln(3e)$ 1

2.2. .... **16**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo (graficamente, como se exemplifica a seguir):



Conclusão: as soluções pedidas são $0,\ 1,\ 4,\ 5$ e $6.$

2.º Processo (por meio de uma tabela, como se exemplifica a seguir):

x	$f(x)$	$g(x)$
0	5,77	− 1
1	2,33	1,14
2	1,07	2,23
3	0,60	1,27
4	0,43	− 0,86
5	0,37	− 2,20
6	0,35	− 1,52

Conclusão: as soluções pedidas são $0,\ 1,\ 4,\ 5$ e $6.$

Qualquer que seja o processo utilizado pelo examinando, as cotações devem ser atribuídas de acordo com o seguinte critério:

Apresentar um gráfico ou uma tabela **(ver notas 1, 2 e 3)** 6
Conclusão **(ver nota 4)** 10

Notas:

1. O examinando deve explicar como procedeu, referindo algo que evidencie a forma como utilizou a calculadora na resolução do exercício. Tal pode ser feito **reproduzindo** ou **descrevendo** os gráficos e/ou tabelas utilizados, como se exemplificou atrás.

2. O examinando pode calcular, por meio das funções f e g, as imagens dos inteiros entre 0 e 2π, e não organizar os dados numa tabela. Este processo é equivalente à apresentação de uma tabela, pelo que deve ser cotado da mesma forma.

3. Pode acontecer que o examinando comece por estabelecer a equivalência $f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) > 0$, procurando depois os valores de x inteiros que, no intervalo $[0, 2\pi]$, têm imagem positiva, por meio de $f - g$.

4. Por cada solução não indicada, ou por cada valor indicado que não seja solução, deverão ser descontados 3 pontos, até um desconto máximo de 10 pontos.

5. Todas as respostas sem qualquer justificação, ou que se limitem a apresentar justificações vazias de significado, como, por exemplo, «Vi na calculadora», devem ser cotadas entre 0 e 5 pontos, de acordo com o seguinte critério:

   Cada solução correcta 1
   Cada solução incorrecta .... -3

3.1. .... **10**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Área de uma das bases do prisma $= x^2$ 1

Área das duas bases do prisma $= 2\,x^2$ 1

Altura do prisma $= \dfrac{2}{x^2}$ **(ver notas 1 e 2)** 5

Área lateral $= 4\,.\,x\,.\,\dfrac{2}{x^2}$ 2

$A(x) = \dfrac{2\,x^3 + 8}{x}$ 1

ou

$A(x) = 2\,x^2 + 4\,.\,x\,.\,y$ 4

$y = \dfrac{2}{x^2}$ **(ver notas 1 e 2)** 5

$A(x) = \dfrac{2\,x^3 + 8}{x}$ 1

2.º Processo:

$\frac{2x^3+8}{x} = 2x^2 + \frac{8}{x}$ 1

Referir que $2x^2$ é a área das duas bases do prisma 2

Concluir que a área lateral deverá ser $\frac{8}{x}$ 1

Provar que a área lateral é, de facto, $\frac{8}{x}$ 6

Altura do prisma $= \frac{2}{x^2}$ **(ver notas 1 e 2)** 5

Restantes cálculos 1

Notas:

1. Qualquer que seja o processo utilizado pelo examinando, **exige-se a explicitação da expressão que dá a altura do prisma**.

   Se o examinando não a apresentar, deverão ser atribuídos 0 (zero) dos cinco pontos previstos para tal explicitação.

2. A obtenção da expressão que dá a altura do prisma pode, eventualmente, resultar de uma equação do tipo $x^2 . y = 2$.

   No entanto, **não se exige** que o examinando apresente uma equação para justificar como obteve a referida expressão (o examinando pode concluir, mentalmente, que, sendo o volume igual a 2 e a área da base igual a x^2, a altura terá de ser $2/x^2$).

3.2. .... **17**

$A'(x) = \frac{6x^2 . x - (2x^3+8)}{x^2}$ 3

$A'(x) = \frac{4x^3-8}{x^2}$ 2

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8 = 0$ 3

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$ 2

Estudar o sinal de A' (que pode ser apresentado através de um quadro) 5

Conclusão 2

4. .... **10**

Referir que os declives das rectas r e s são, respectivamente, iguais a $f'(a)$ e a $f'(b)$ 3

Referir que, pelo facto de f ser uma função crescente, se tem $f'(a) \geq 0$ e $f'(b) \geq 0$ 3

Conclusão: como não é verdade que $f'(b) = -\dfrac{1}{f'(a)}$, as rectas r e s não podem ser perpendiculares 4

5.1. .... **15**

A probabilidade pedida pode ser obtida por, pelo menos, dois processos, consoante o modelo adoptado para formar o espaço de resultados.

1.º Processo:

O espaço de resultados é o conjunto das colecções de 6 cartas, extraídas de um baralho de 52 cartas.

Número de casos possíveis $= {}^{52}C_6$

Número de casos favoráveis $= 4 \times {}^{48}C_5$

Probabilidade pedida $= \dfrac{4 \times {}^{48}C_5}{{}^{52}C_6}$

2.º Processo:

O espaço de resultados é o conjunto das sequências de 6 cartas, extraídas de um baralho de 52 cartas.

Número de casos possíveis $= {}^{52}A_6$

Número de casos favoráveis $= 4 \times 6 \times {}^{48}A_5$

Probabilidade pedida $= \dfrac{4 \times 6 \times {}^{48}A_5}{{}^{52}A_6}$

Qualquer que seja o processo utilizado, as cotações devem ser atribuídas de acordo com o seguinte critério:

Escrita da fracção **(ver notas 1, 2, 3, 4 e 5)** 14
Resultado final 1

Notas:

1. O examinando pode começar por indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e só depois escrever a fracção.
No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente a fracção, não deverá ser penalizado.

2. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da fracção, com a respectiva cotação a atribuir.

$\dfrac{4 \times {}^{48}C_5}{{}^{52}C_6}$ ou $\dfrac{4 \times 6 \times {}^{48}A_5}{{}^{52}A_6}$ (fracção correcta).................................. 14

$\dfrac{4 \times {}^{48}A_5}{{}^{52}A_6}$ 11

$\dfrac{{}^{48}C_5}{{}^{52}C_6}$ ou $\dfrac{6 \times {}^{48}A_5}{{}^{52}A_6}$ 8

$\dfrac{{}^{48}A_5}{{}^{52}A_6}$ 6

3. Se o examinando indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído à sua resposta menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

4. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos possíveis (${}^{52}C_6$ ou ${}^{52}A_6$), deverão ser atribuídos 2 pontos à sua resposta.

5. Se o examinando indicar (correctamente) apenas o número de casos favoráveis ($4 \times {}^{48}C_5$ ou $4 \times 6 \times {}^{48}A_5$), deverão ser atribuídos 11 pontos à sua resposta.

5.2. .... **15**

Apresentam-se a seguir dois exemplos de resposta:

Exemplo 1

$P\big((C_2 \cap F_2) \mid E_1\big)$ *significa «probabilidade de sair figura de copas na segunda extracção, sabendo que saiu uma carta de espadas na primeira extracção».*

Tem-se, assim, que:

O número de casos possíveis é 51 (número de cartas existentes no baralho, após a extracção da primeira carta).

O número de casos favoráveis é 3 (número de figuras de copas existentes no baralho, após a extracção da primeira carta, a qual, por ser de espadas, não é figura de copas).

A probabilidade pedida é, por aplicação da regra de Laplace, $\frac{3}{51}$.

Exemplo 2

$P\big((C_2 \cap F_2) \mid E_1\big)$ *significa «probabilidade de sair figura de copas na segunda extracção, sabendo que saiu uma carta de espadas na primeira extracção».*

Tem-se, assim, que:

O número de casos possíveis é 13×51 *(número de sequências* $e_1\, q_2$ *, em que* e_1 *designa uma carta de espadas, extraída na primeira tiragem, e* q_2 *designa uma carta qualquer, extraída na segunda tiragem).*

O número de casos favoráveis é 13×3 *(número de sequências* $e_1\, f_2$ *, em que* e_1 *designa uma carta de espadas, extraída na primeira tiragem, e* f_2 *designa uma figura de copas, extraída na segunda tiragem).*

A probabilidade pedida é, por aplicação da regra de Laplace, $\frac{13 \times 3}{13 \times 51} = \frac{3}{51}$

Tal como os exemplos acima ilustram, para que a composição possa ser considerada completa, deverá contemplar os seguintes pontos:

- o significado de $P\big((C_2 \cap F_2) \mid E_1\big)$, no contexto da situação descrita
- a explicação do número de casos possíveis
- a explicação do número de casos favoráveis
- a conclusão, fundamentada nos três pontos anteriores, de que a probabilidade pedida é $\frac{3}{51}$

V.S.F.F.

Na tabela seguinte, indica-se como esta alínea deve ser cotada:

Forma / Conteúdo	Nível 1 (*)	Nível 2 (**)	Nível 3 (***)
A composição contempla os quatro pontos.	15	13	11
A composição contempla três pontos.	11	9	7
A composição contempla dois pontos.	7	5	3
A composição contempla um ponto.	3	2	1

(*) **Nível 1** - Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

(**) **Nível 2** - Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecte a inteligibilidade.

(***) **Nível 3** - Redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade.

Pode acontecer que uma composição não se enquadre completamente num dos três níveis descritos e/ou contenha características presentes em mais do que um deles. Nesse caso, deverá ser atribuída uma pontuação intermédia.

Nota:

Se o examinando apresentar o valor da probabilidade pedida $\left(\frac{3}{51}\right)$, sem qualquer justificação, deverão ser atribuídos 0 (zero) pontos à sua resposta.