EXAME 435 - 2.ª FASE 5/09/2002

VERSÃO 1 - 1.ª PARTE

1) $D_{\frac{r}{s}} = \{x \in \mathbb{R} : s(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ C

2) O ponto de abcissa c é um ponto de inflexão porque $f''(c)=0$ e o sinal de f'' é diferente à direita e à esquerda de c. B

3) $d(0)=2$ e $d(\pi)=0$. A única igualdade que satisfaz estas condições é $d(\alpha)=1+\cos\alpha$ A

4) $V(c)$ é uma função decrescente em $[0,1]$ A

5) $\underbrace{\_\ \_}_{P_2}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{P_4}$ $\quad P_2 \times P_4 = 48$ C

6)

	-1	0	1
-1	(-1,-1)	(-1,0)	(-1,1)
0	(0,-1)	(0,0)	(0,1)
1	(1,-1)	(1,0)	(1,1)

Por análise da tabela ao lado podemos concluir que a opção correcta é a D

7) B porque z e $\bar{z}$ têm imagens simétricas relativamente ao eixo real.

2.ª PARTE

1.1) $(1+i)^2 + b(1+i) + c = 0+0i \Leftrightarrow 1+2i-1+b+bi+c = 0+0i \Leftrightarrow$

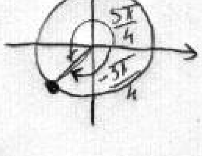
$\Leftrightarrow b+c+(2+b)i = 0+0i \Leftrightarrow \begin{cases} b+c=0 \\ 2+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ b=-2 \end{cases}$

1.2) $z_1 \times \bar{z}_2 = \sqrt{2}\ \text{cis}\left(-\alpha+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\alpha+\frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(-\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

para ser um nº real negativo: $\cos\left(-\alpha+\frac{\pi}{4}\right) < 0 \ \wedge\ \text{sen}\left(-\alpha+\frac{\pi}{4}\right) = 0.$

$\frac{\pi}{2} < -\alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2} \ \wedge\ -\alpha + \frac{\pi}{4} = \pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < -\alpha < \frac{5\pi}{4} \ \wedge\ -\alpha = \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow \alpha = -\frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} - 2\pi \qquad z_2 = \text{cis}\,\frac{5\pi}{4}$

2) 2.1.1) Não tem assimptotas verticais porque $D_f = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3} + 2e^{1-x}\right) = \frac{1}{3} + 2\times 0 = \frac{1}{3}$$

A recta $y=\frac{1}{3}$ é a única assimptota horizontal

porque $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3} + 2\times e^{1-x}\right) = \frac{1}{3} + 2\times(+\infty) = +\infty$.

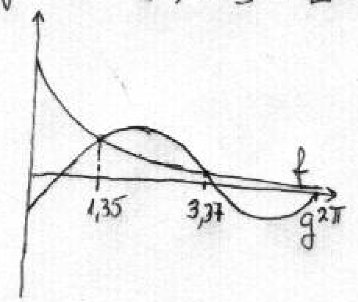
2.1.2) $f(x) = g(\pi) \Leftrightarrow \frac{1}{3} + 2e^{1-x} = 2\,\text{sen}\,\pi - \cos\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3} + 2e^{1-x} = 1 \Leftrightarrow 6e^{1-x} = 2 \Leftrightarrow e^{1-x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 1-x = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 - \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x = \ln e - \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{e}{\frac{1}{3}}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \ln(3e)$

2.2) Janela $[0, 2\pi] \times [-7, 7]$



As soluções inteiras da inequação $f(x) > g(x)$ no intervalo $[0, 2\pi]$ são:

0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 6

3) $V = A_b \times h \Leftrightarrow 2 = x^2 \times h \Leftrightarrow h = \frac{2}{x^2}$

$A(x) = 2x^2 + 4 \times x \times \frac{2}{x^2} = 2x^2 + \frac{8\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A(x) = \frac{2x^3+8}{x}$ c.q.d.

3.2) $A'(x) = \frac{6x^2 \cdot x - (2x^3+8)}{x^2} = \frac{6x^3 - 2x^3 - 8}{x^2} = \frac{4x^3-8}{x^2}$

$4x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$

	0		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
$4x^3-8$		−	0	+	
x^2		+	+	+	
$A'(x)$		−	0	+	
$A(x)$		↘	mín.	↗	

Mínimo $= A(\sqrt[3]{2}) =$

$= \frac{2\times(\sqrt[3]{2})^3 + 8}{\sqrt[3]{2}} =$

$= \frac{2\times 2 + 8}{\sqrt[3]{2}} = \frac{12}{\sqrt[3]{2}} = 6\sqrt[3]{4}$ dm^3

4) Como f é crescente em todo o seu domínio, qualquer recta tangente a f tem declive positivo, isto é, $m_r > 0$ e $m_s > 0$. Duas rectas perpendiculares têm declives de sinais contrários porque se $r \perp s$ então $m_r = -\frac{1}{m_s}$. Como r e s têm declives positivos não podem ser perpendiculares.

5.1) $P = \frac{{}^{4}C_1 \times {}^{48}C_5}{{}^{52}C_6} \simeq 0,336$

5.2) $P((F_2 \cap C_2) | E_1)$ significa a probabilidade de sair uma figura de copas na segunda extracção sabendo que na 1ª extracção saiu uma espada. Assim,

$$P((F_2 \cap C_2) | E_1) = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}.$$