Resolução Exame de Matemática (código 435) 2002

Militares

Grupo I

1. (D) porque o gráfico de f^{-1} é simétrico do de f em relação à bissectriz dos quadrantes ímpares.

2. (C) o gráfico de f não tem assimptota obliqua porque se só está definida em $[0,+\infty[$ e tem uma assimptota horizontal já não pode ter oblíqua, pois, nesse caso não estaríamos perante uma função por haver objectos com mais do que uma imagem (uma próximo de 2 e outra próxima de $(\pm)\infty$.

3. (C) porque $\ln a = -\ln b \Leftrightarrow \ln a + \ln b = 0 \Leftrightarrow \ln(a \times b) = 0 \Leftrightarrow a \times b = e^0 \Leftrightarrow a \times b = 1$.

4. (D) porque o declive da recta tangente à curva no ponto de abcissa a é $f'(a) = 0$ o que significa que a recta é horizontal e porque passa no ponto $(a, f(a))$ a sua equação é y = f(a).

5. (A) porque depois da Joana escolher os discos que vai dar ao Ricardo, o Paulo fica com os restantes.

6. (B) porque se p representa o número de bolas pretas a probabilidade de a segunda bola extraída ser preta sabendo que a primeira foi verde é dada por $\frac{p}{6+p-1}$, logo $\frac{p}{6+p-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2p = 5 + p \Leftrightarrow p = 5$.

7. (B) sendo $w = \rho \operatorname{cis} \pi$ então $\sqrt{w} = \sqrt{\rho} \operatorname{cis} \frac{\pi + 2k\pi}{2}, k \in \{0,1\} \Leftrightarrow \sqrt{w} = \sqrt{\rho} \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} \vee$ $\vee \sqrt{w} = \sqrt{\rho} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$. As soluções são representadas geometricamente no eixo imaginário.

Grupo II

1. $z_1 = 1 - i$

1.1. Sendo $z = \rho \operatorname{cis}\theta$, $z^2 = \bar{z} \times z_1 \Leftrightarrow \rho^2 \operatorname{cis}(2\theta) = \rho \operatorname{cis}(-\theta) \times \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ porque

$|z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ e porque $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\theta \in 4^{\text{o}}$ quadrante e será $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

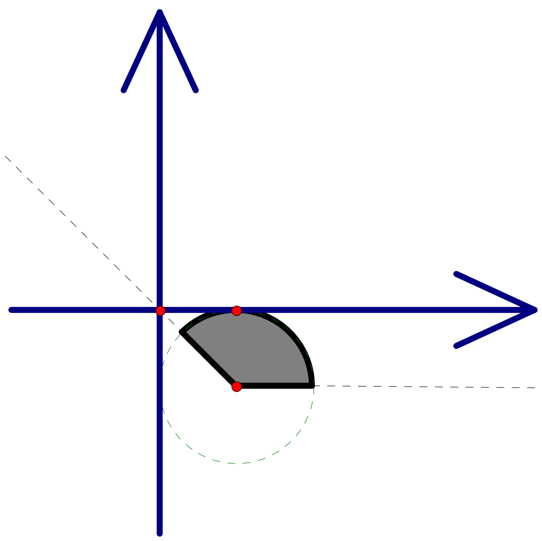
$$\rho^2 \operatorname{cis}(2\theta) = \rho \operatorname{cis}(-\theta) \times \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \rho^2 \operatorname{cis}(2\theta) = \left(\sqrt{2}\rho\right) \operatorname{cis}\left(-\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = \sqrt{2}\rho \\ 2\theta = -\theta - \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho\left(\rho - \sqrt{2}\right) = 0 \\ 3\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 0 \vee \rho = \sqrt{2} \\ \theta = \dfrac{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}, k \in \{0,1,2\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \theta = -\frac{\pi}{12} \end{cases} \vee \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{7\pi}{12} \end{cases} \vee \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \theta = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{12}\right) \vee z = \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{12}\right) \vee z = \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$

1.2.



2.

2.1. P(ser rapariga $\cup$ ter 16 anos) = P(ser rapariga) + P(ter 16 anos) – P(ser rapariga $\cap$ ter 16 anos) $= \frac{9}{25} + \frac{10}{25} - \frac{4}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$

2.2. $P = \dfrac{2\left(4\times 2+5\times 4+6\times 4\right)}{25\times 24} = \dfrac{2\left(8+20+24\right)}{25\times 24} = \dfrac{104}{600} = \dfrac{13}{75}$

ou $P = \dfrac{4\times 2+5\times 4+6\times 4}{{}^{25}C_2} = \dfrac{13}{75}$

3. Seja h(x)= (f - g)(x) = ln x – x^2 + 3

3.1. Dh = IR^+ e h' (x) = $\dfrac{1}{x} - 2x = \dfrac{1-2x^2}{x}$

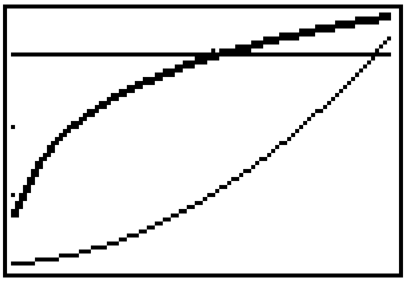
$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-2x^2}{x} = 0 \wedge x \in IR^+ \Leftrightarrow 1-2x^2 = 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \wedge x > 0 \Leftrightarrow$

$x^2 = \dfrac{1}{2} \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

x	0	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
f'	+	0	-
f	↗	M	↘

A função h é crescente em $\left]0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$ e é decrescente em $\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$ e tem um máximo em x = $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3.2. Da observação do gráfico ao lado, onde a função f está representada a traço mais grosso no intervalo $[0{,}1; 1{,}8]$ posso concluir que, de facto, todos os números x do intervalo$[0{,}1; 1{,}8]$são solução da inequação f(x)>g(x).



4. $f(\theta) = 2\pi r^2 (1 - \text{sen}\theta),\ \theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

4.1. Área da superfície esférica = $4\pi r^2$

$\dfrac{4\pi r^2}{4} = 2\pi r^2 (1 - \text{sen}\theta) \Leftrightarrow 1 - \text{sen}\theta = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \text{sen}\theta = \dfrac{1}{2}$

$\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\wedge \text{sen}\theta = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6}$

4.2. $g(h) = 2\pi r^2\left(1 - \frac{r}{r+h}\right) = 2\pi r^2 - \frac{2\pi r^3}{r+h} = \frac{2\pi r^3 + 2\pi r^2 h - 2\pi r^3}{r+h} = \frac{2\pi r^2 h}{r+h}$, logo

$g(h) = \frac{2\pi r^2 h}{r+h}$ como queríamos provar.

4.3. $\lim\limits_{h\to+\infty} \frac{2\pi r^2 h}{r+h} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{h\to+\infty} \frac{2\pi r^2 h}{h} = 2\pi r^2$

Quando $h \to +\infty$, os raios NA aproximam-se da horizontal e a parte visível da superfície da terra tende para metade da área da superfície esférica.

Isto condiz com o resultado obtido pois A=$\frac{4\pi r^2}{2} = 2\pi r^2$.

5. O gráfico **(A)** é o correcto.

O gráfico **(B)** não serve porque o ângulo é orientado logo o domínio da função será $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

O gráfico **(C)** não serve porque quando x tende para $-\frac{\pi}{2}$ ou para $\frac{\pi}{2}$ a distância de P à origem tende para $+\infty$.

O gráfico **(D)** não serve porque quando x = 0 a distância de P à origem é a distância da origem à recta r e não zero como mostra este gráfico.