

**EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO**  
**12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)**  
**Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos**

Duração da prova: 120 minutos  
2003

1.ª FASE  
2.ª CHAMADA  
VERSÃO 1

**PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA**

---

**VERSÃO 1**

**Na sua folha de respostas, indique  
claramente a versão da prova.**

**A ausência desta indicação implicará a  
anulação de todo o GRUPO I.**

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui seis questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de onze.

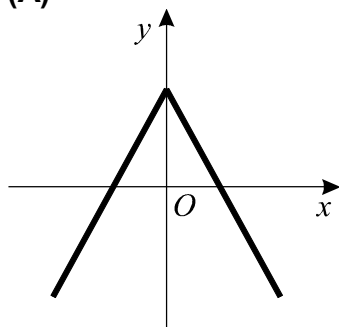
**Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.**

## Grupo I

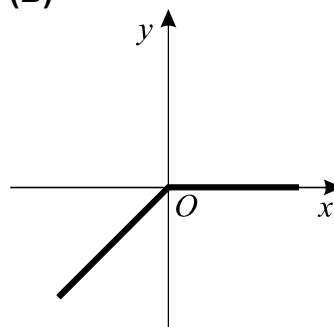
- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico de uma função par, de domínio  $\mathbb{R}$  e contradomínio  $] -\infty, 0]$  ?

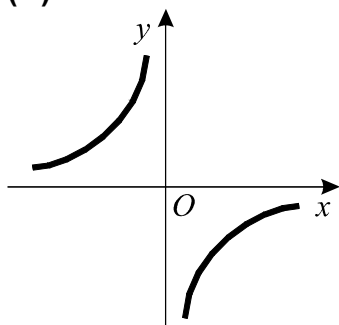
(A)



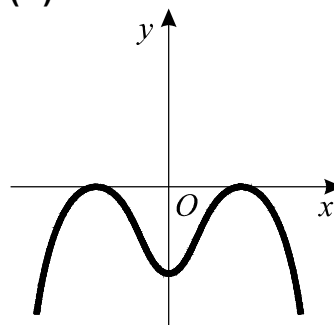
(B)



(C)



(D)

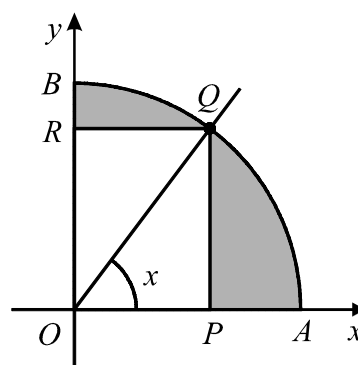


2. Na figura está representado, em referencial o.n.  $xOy$ , um arco de circunferência  $AB$ , de centro na origem do referencial.

O ponto  $Q$  move-se ao longo desse arco.

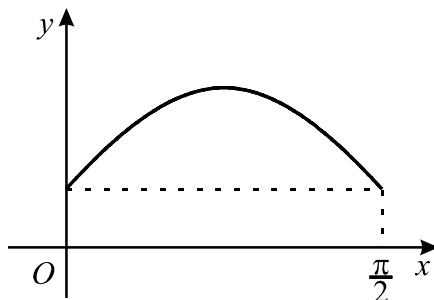
Os pontos  $P$  e  $R$ , situados sobre os eixos  $Ox$  e  $Oy$ , respectivamente, acompanham o movimento do ponto  $Q$ , de tal forma que o segmento de recta  $[PQ]$  é sempre paralelo ao eixo  $Oy$  e o segmento de recta  $[QR]$  é sempre paralelo ao eixo  $Ox$ .

Para cada posição do ponto  $Q$ , seja  $x$  a amplitude do ângulo  $AOQ$  e seja  $h(x)$  a área da região sombreada.

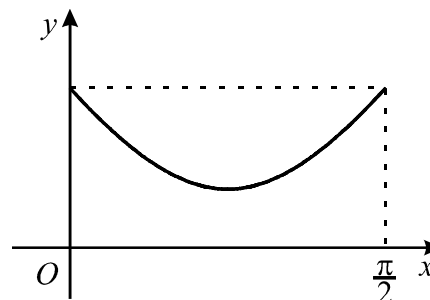


Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função  $h$ ?

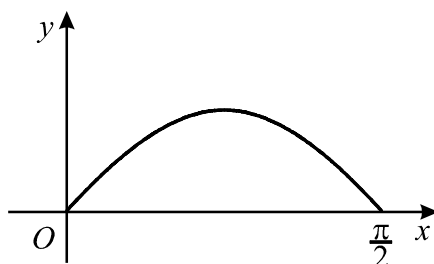
(A)



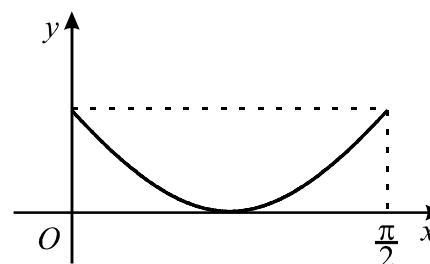
(B)



(C)



(D)



3. Indique o valor de  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log_2 x}{e^x - 1}$

(A) 0

(B) 1

(C)  $-\infty$

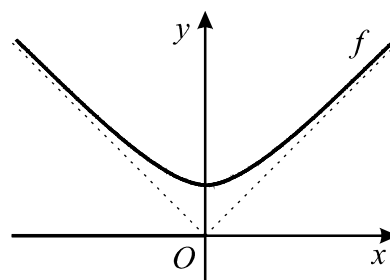
(D)  $+\infty$

4. Na figura junta está representada parte do gráfico de uma função  $f$  de domínio  $\mathbb{R}$ , contínua em todo o seu domínio.

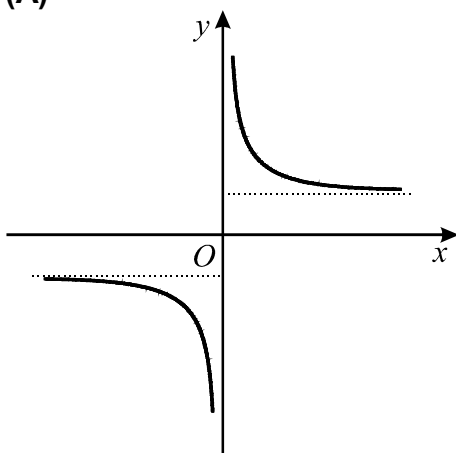
A bissetriz dos quadrantes pares e a bissetriz dos quadrantes ímpares são assíntotas do gráfico de  $f$ .

Indique em qual das figuras seguintes pode estar representada parte do gráfico da função  $g$  definida por

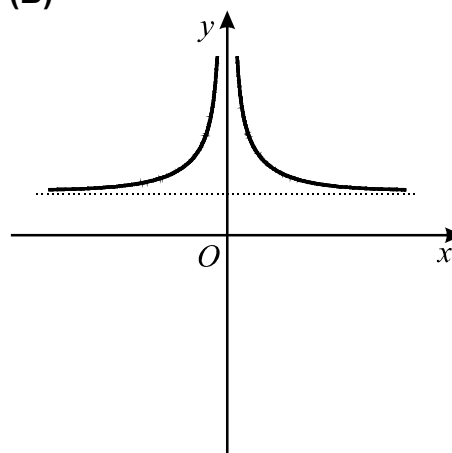
$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$



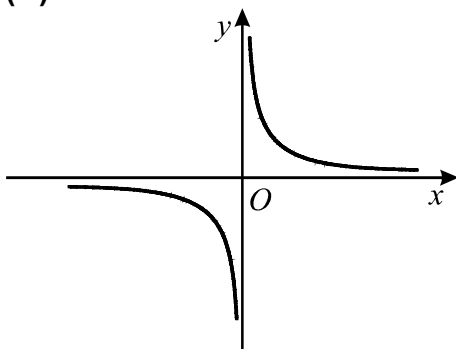
(A)



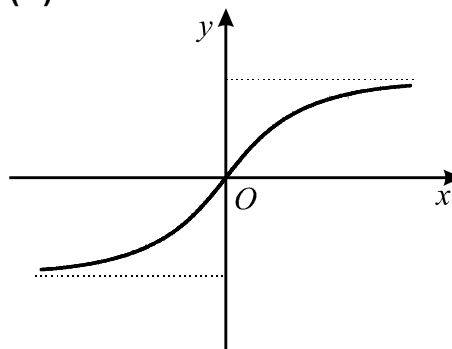
(B)



(C)



(D)



5. O quarto número de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 19 600.  
A soma dos quatro primeiros números dessa linha é 20 876.  
Qual é o terceiro número da **linha seguinte**?

(A) 1 275

(B) 1 581

(C) 2 193

(D) 2 634

6. Um saco contém bolas azuis, brancas e pretas.

Tira-se, ao acaso, uma bola do saco.

Sejam os acontecimentos:

$A$  – a bola retirada é azul

$B$  – a bola retirada é branca

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A)  $A$  e  $B$  são contrários

(B)  $A$  e  $\overline{B}$  são contrários

(C)  $A$  e  $B$  são incompatíveis

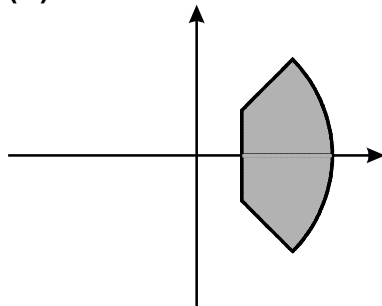
(D)  $A$  e  $\overline{B}$  são incompatíveis

7. Considere, em  $\mathbb{C}$ , a condição:

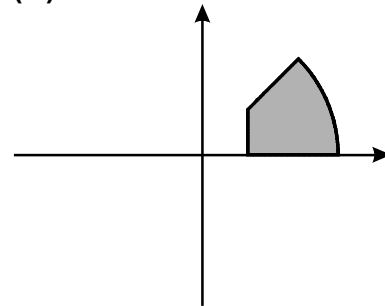
$$|z| \leq 3 \quad \wedge \quad 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \quad \wedge \quad \operatorname{Re} z \geq 1$$

Em qual das figuras seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição?

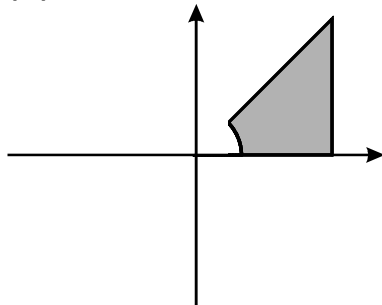
(A)



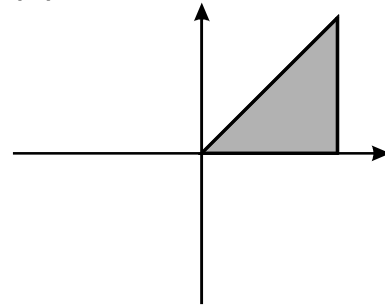
(B)



(C)



(D)



## Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

**Atenção:** quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1.  $\mathbb{C}$  é o conjunto dos números complexos;  $i$  designa a unidade imaginária.

1.1. Sem recorrer à calculadora, determine  $\frac{(\sqrt{3}-2i)^2 + \left(2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{9}\right)^3}{\operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}}$  apresentando o resultado na forma algébrica.

1.2. Seja  $\alpha$  um número real.

Sejam  $z_1$  e  $z_2$  dois números complexos tais que:

- $z_1 = \operatorname{cis} \alpha$
- $z_2 = \operatorname{cis} (\alpha + \pi)$

Mostre que  $z_1$  e  $z_2$  não podem ser ambos raízes cúbicas de um mesmo número complexo.

2. Considere a expressão  $f(x) = a + b \operatorname{sen}^2 x$

Sempre que se atribui um valor real a  $a$  e um valor real a  $b$ , obtemos uma função de domínio  $\mathbb{R}$ .

2.1. Nesta alínea, considere  $a = 2$  e  $b = -5$ .

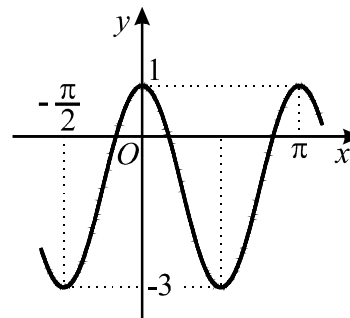
Sabe-se que  $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2}$ . Sem recorrer à calculadora, calcule  $f(\theta)$

2.2. Para um certo valor de  $a$  e um certo valor de  $b$ , a função  $f$  tem o seu gráfico parcialmente representado na figura junta.

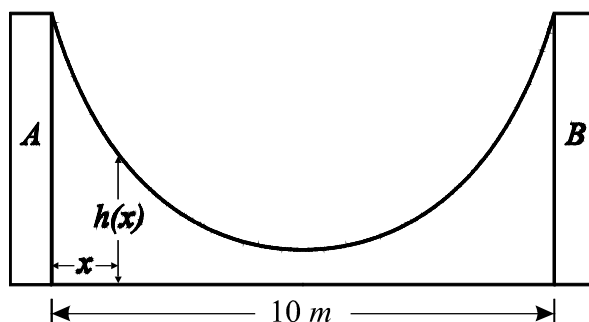
Conforme essa figura sugere, tem-se:

- o contradomínio de  $f$  é  $[-3, 1]$
- $0$  e  $\pi$  são maximizantes
- $-\frac{\pi}{2}$  e  $\frac{\pi}{2}$  são minimizantes

Determine  $a$  e  $b$ .



3. Uma rampa de desportos radicais foi construída entre duas paredes,  $A$  e  $B$ , distanciadas de 10 metros, como se mostra na figura.



Considere a função  $h$  definida por

$$h(x) = 15 - 4 \ln(-x^2 + 10x + 11) \quad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

Admita que  $h(x)$  é a altura, em metros, do ponto da rampa situado  $x$  metros à direita da parede  $A$ .

- 3.1. Determine a altura da parede  $A$ . Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.

**Nota:** se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

- 3.2. **Sem recorrer à calculadora**, estude a função  $h$  quanto à monotonia e conclua daí que, tal como a figura sugere, é num ponto equidistante das duas paredes que a altura da rampa é mínima.

- 3.3. Mostre, analiticamente, que  $h(5 - x) = h(5 + x)$ .  
Interprete esta igualdade no contexto da situação descrita.

4. De uma função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , sabe-se que a sua derivada é dada por

$$f'(x) = (x + 1)e^x - 10x$$

Seja  $A$  o único ponto de inflexão do gráfico de  $f$ .

Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine a abcissa do ponto  $A$ , arredondada às décimas.

Explique como procedeu. Inclua, na sua explicação, o(s) gráfico(s) que obteve na calculadora.



5. O sangue humano está classificado em quatro grupos distintos:  $A$ ,  $B$ ,  $AB$  e  $O$ .

Independentemente do grupo, o sangue pode possuir, ou não, o factor Rhésus.

Se o sangue de uma pessoa possui este factor, diz-se Rhésus positivo ( $Rh^+$ ); se não possui este factor, diz-se Rhésus negativo ( $Rh^-$ ).

Na população portuguesa, os grupos sanguíneos e os respectivos Rhésus estão repartidos da seguinte forma:

	$A$	$B$	$AB$	$O$
$Rh^+$	40 %	6,9 %	2,9 %	35,4 %
$Rh^-$	6,5 %	1,2 %	0,4 %	6,7 %

- 5.1. Escolhido um português ao acaso, qual é a probabilidade de o seu grupo sanguíneo **não** ser o  $O$ ? Apresente o resultado sob a forma de percentagem, arredondado às unidades.

- 5.2. Escolhido um português ao acaso, e sabendo que é Rhésus negativo, qual é a probabilidade de o seu grupo sanguíneo ser o  $A$ ? Apresente o resultado sob a forma de percentagem, arredondado às unidades.

6. Considere o seguinte problema:

*Vinte e cinco jovens (doze rapazes e treze raparigas) pretendem ir ao cinema. Chegadas lá, verificam que existem apenas vinte bilhetes (para duas filas com dez lugares consecutivos em cada uma delas). Comprados os vinte bilhetes, distribuem-nos ao acaso. Como é evidente, cinco jovens irão ficar sem bilhete.*

*Qual é a probabilidade de uma das filas ficar ocupada só com rapazes e a outra só com raparigas?*

Uma resposta correcta para este problema é:  $\frac{{}^{12}C_{10} \times {}^{13}C_{10} \times 2 \times 10! \times 10!}{{}^{25}C_{20} \times 20!}$

Numa pequena composição, com cerca de vinte linhas, explique **esta resposta**.

**Nota:**

Deve organizar a sua composição de acordo com os seguintes tópicos:

- referência à Regra de Laplace;
- explicação do número de casos possíveis;
- explicação do número de casos favoráveis.

**FIM**

## COTAÇÕES

**Grupo I .....63**

Cada resposta certa .....	+9
Cada resposta errada.....	- 3
Cada questão não respondida ou anulada .....	0

**Nota:** um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

**Grupo II .....137**

1. ....	21
1.1. ....	11
1.2. ....	10

2. ....	30
2.1. ....	15
2.2. ....	15

3. ....	38
3.1. ....	6
3.2. ....	16
3.3. ....	16

4. ....	16
---------	----

5. ....	16
5.1. ....	6
5.2. ....	10

6. ....	16
---------	----

**TOTAL ..... 200**

## Formulário

### Áreas de figuras planas

$$\text{Losango: } \frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$$

$$\text{Trapézio: } \frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$$

$$\text{Polígono regular: } \text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$$

$$\text{Círculo: } \pi r^2 \quad (r - \text{raio})$$

### Áreas de superfícies

$$\text{Área lateral de um cone: } \pi r g \\ (r - \text{raio da base; } g - \text{geratriz})$$

$$\text{Área de uma superfície esférica: } 4 \pi r^2 \\ (r - \text{raio})$$

### Volumes

$$\text{Prisma: } \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Cilindro: } \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Pirâmide: } \frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Cone: } \frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Esfera: } \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (r - \text{raio})$$

### Trigonometria

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$$

$$\text{cos}(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$$

$$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

### Complexos

$$(\rho \text{ cis } \theta) \cdot (\rho' \text{ cis } \theta') = \rho \rho' \text{ cis } (\theta + \theta')$$

$$\frac{\rho \text{ cis } \theta}{\rho' \text{ cis } \theta'} = \frac{\rho}{\rho'} \text{ cis } (\theta - \theta')$$

$$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis } (n\theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{ cis } \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \{0, \dots, n-1\}$$

### Progressões

Soma dos  $n$  primeiros termos de uma

$$\text{Prog. Aritmética: } \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$

$$\text{Prog. Geométrica: } u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

### Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\text{sen } u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\text{cos } u)' = -u' \cdot \text{sen } u$$

$$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

### Limites notáveis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$