**PROPOSTA DE CORRECÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA (435)**
**1ª FASE — 2ª CHAMADA 2003**

## Grupo I

| Questões | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Versão 1 | D | B | C | A | A | C | B |
| Versão 2 | C | A | C | D | D | B | C |

## Grupo II

(Proposta de resolução)

1.1.
$$\frac{(\sqrt{3}-2i)^2+\left(2\operatorname{cis}\frac{\pi}{9}\right)^3}{\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}}=\frac{3-4\sqrt{3}i-4+8\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}}{-i}=\frac{-1-4\sqrt{3}i+8\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{-i}=$$
$$=\frac{-1-4\sqrt{3}i+4+4\sqrt{3}i}{i}=\frac{3}{-i}\cdot\frac{i}{i}=3i$$

1.2. As representações geométricas das raízes cúbicas de um número complexo são os vértices de um triângulo equilátero com centro na origem do referencial, pelo que os argumentos destas raízes devem diferir de $2\pi/3$ entre si. Como a diferença entre os argumentos de $z_2$ e $z_1$ é igual a $\pi$, então $z_1$ e $z_2$ não podem ser raízes cúbicas de um mesmo número complexo.

2.1. Pretende-se calcular $f(\theta)=2-5\operatorname{sen}^2\theta$.

$$1+\operatorname{tg}^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}\Leftrightarrow 1+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\theta}\Leftrightarrow\cos^2\theta=\frac{4}{5}.$$
$$\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta=1\Leftrightarrow\operatorname{sen}^2\theta+\frac{4}{5}=1\Leftrightarrow\operatorname{sen}^2\theta=\frac{1}{5}.$$

Logo,
$$f(\theta)=2-5\times\frac{1}{5}=1.$$

2.2. Como 0 é um maximizante, temos:
$$f(0)=1\Leftrightarrow a+b\cdot 0=1\Leftrightarrow a=1.$$

Como $\pi/2$ é um minimizante, temos:
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-3\Leftrightarrow 1+b\times\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2}=-3\Leftrightarrow 1+b=-3\Leftrightarrow b=-4.$$

Portanto, $a=1$ e $b=-4$.

3.1. A altura da parede $A$ obtém-se calculando o valor da função $h$ na abcissa $x=0$:
$$h(0)=15-4\ln(11)\approx 5,4.$$

A altura da parede $A$ é de 5,4 metros aproximadamente.

3.2.

$$h'(x) = 0 - 4\frac{-2x+10}{-x^2+10x+11} = \frac{8x-40}{-x^2+10x+11}.$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{8x-40}{-x^2+10x+11} = 0 \Leftrightarrow 8x-40=0 \wedge -x^2+10x+11 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 11.$$

Cálculo auxiliar:

$$-x^2+10x+11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100+44}}{-2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 11.$$

| $x$ | 0 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|
| $8x-40$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $-x^2+10x+11$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $h'$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $h$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

Efectivamente, a altura da rampa é mínima no ponto que dista 5 metros da parede $A$ e, por consequência, 5 metros da parede $B$.

3.3.

$$h(5-x) = h(5+x) \Leftrightarrow 15-4\ln[-(5-x)^2+10(5-x)+11] = 15-4\ln[-(5+x)^2+10(5+x)+11] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4\ln(-25-10x-x^2+50+10x+11) = -4\ln(-25+10x-x^2+50-10x+11) \Leftrightarrow$$

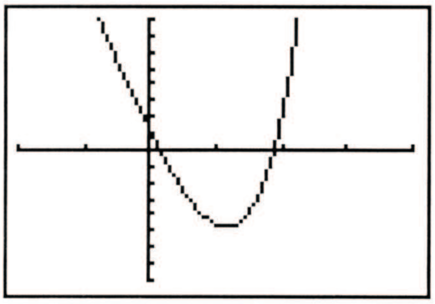
$$\Leftrightarrow -4\ln(-x^2+36) = -4\ln(-x^2+36).$$

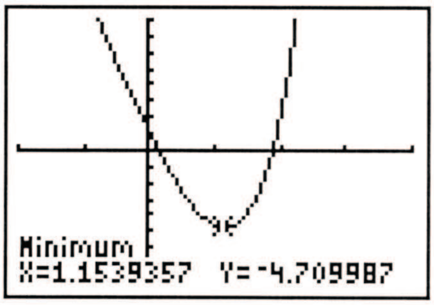
Proposição verdadeira, para todo $x$.

Esta igualdade significa que os pontos da rampa que estão à mesma distância do ponto central têm a mesma altura.

4. Dado que $f'$ é uma função com derivada finita no seu domínio, um dos processos possíveis para encontrar a abcissa do ponto de inflexão da função $f$ consiste em determinar o valor de $x$ onde o gráfico de $f'$ admite um extremo.

Representando graficamente a função $f'$,






verificamos que a derivada tem um mínimo do qual teremos que encontrar a abcissa.

Recorrendo aos comandos específicos da calculadora obtemos para esta abcissa o valor $x \approx 1,2$.

5.1. Sendo $O$ o acontecimento "ter grupo sanguíneo $O$", então

$$p(\overline{O}) = 100 - p(O) = 100 - 35,4 - 6,7 = 57,9.$$

A probabilidade do grupo sanguíneo não ser do grupo $O$ é aproximadamente de $58\%$.

5.2. Sejam $A$ e $Rh^-$ respectivamente os acontecimentos "ter grupo sanguíneo $A$" e "ter factor Rhésus negativo",

$$p(A|Rh^-) = \frac{p(A \cap Rh^-)}{p(Rh^-)} = \frac{6,5\%}{14,8\%} \approx 0,44.$$

A probabilidade do grupo sanguíneo ser $A$ sabendo que o factor Rhésus é negativo é de aproximadamente $44\%$.

6. Segundo a Regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis desse acontecimento, desde que todos eles sejam equiprováveis e em número finito, o que se verifica na situação proposta.

Dado o número disponível de bilhetes (20) temos de escolher 20 pessoas das 25 existentes, donde resulta o número ${}^{25}C_{20}$. Seguidamente, as 20 pessoas escolhidas vão ser distribuídas pelos 20 lugares, o que pode ser feito de $P_{20} = 20!$ formas diferentes. Assim, o número de casos possíveis é dado por ${}^{25}C_{20} \times 20!$.

Pretendendo que os 10 lugares de uma das filas sejam ocupados só por rapazes, a escolha destes terá de ser feita entre os 12, pelo que temos ${}^{12}C_{10}$. De igual modo, teremos de escolher 10 das 13 raparigas para ocupar os lugares da outra fila: ${}^{13}C_{10}$.

Seleccionados os rapazes e as raparigas temos de os distribuir pelas duas filas, podendo as raparigas ficar na fila da frente ou na fila de trás, daí o factor 2. Uma vez escolhida a fila onde ficarão as raparigas, estas poderão distribuir-se pelos 10 lugares de $P_{10} = 10!$ formas diferentes—o mesmo se passando com os rapazes. Portanto, o número de casos favoráveis é dado por ${}^{12}C_{10} \times {}^{13}C_{10} \times 2 \times 10! \times 10!$.

Logo, a probabilidade $p$ do referido acontecimento, pela Regra de Laplace, é dada por

$$p = \frac{{}^{12}C_{10} \times {}^{13}C_{10} \times 2 \times 10! \times 10!}{{}^{25}C_{20} \times 20!}.$$

FIM