

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO
12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos
2003

2.ª FASE
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui seis questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de onze.

Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. De uma função f , de domínio $[-4, 5]$ e **contínua** em todo o domínio, sabe-se que:

- $f(-4) = 6$; $f(2) = -1$; $f(5) = 1$
- f é estritamente decrescente no intervalo $[-4, 2]$
- f é estritamente crescente no intervalo $[2, 5]$

Quantas soluções tem a equação $f(x) = 0$?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

2. Seja g uma função, de domínio A , definida por $g(x) = \ln(1 - x^2)$

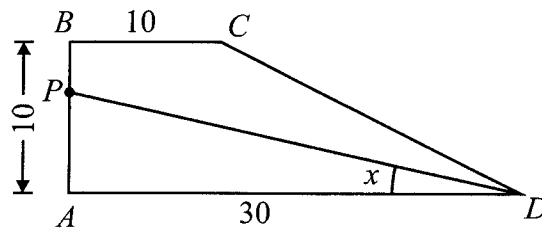
Qual dos seguintes poderá ser o conjunto A ?

- (A) $] -e + 1, e - 1[$ (B) $] -1, 1[$
(C) $] 0, +\infty[$ (D) $] -\infty, 1[$

3. Seja f uma função de domínio \mathbb{R} , e seja g a função definida por $g(x) = f(x + 1)$.
A recta de equação $y = 2x + 4$ é a única assíntota do gráfico de f .
Qual das seguintes é uma equação da única assíntota do gráfico de g ?

- (A) $y = 2x + 6$ (B) $y = 2x + 4$
(C) $y = 2x - 4$ (D) $y = 2x - 6$

4. Na figura está representado um trapézio rectângulo $[ABCD]$, cujas bases têm 10 e 30 unidades de comprimento e a altura tem 10 unidades de comprimento.



Considere que um ponto P se desloca sobre o lado $[AB]$.
Para cada posição do ponto P , seja x a amplitude, em radianos, do ângulo PDA .
Pretende-se determinar o valor de x para o qual o segmento $[PD]$ divide o trapézio em duas figuras com a mesma área.

Qual das equações seguintes traduz este problema?

- (A) $\frac{30^2 \operatorname{sen} x}{2} = 100$ (B) $\frac{30^2 \operatorname{tg} x}{2} = 100$
(C) $\frac{30 \times 10 \operatorname{sen} x}{4} = 150$ (D) $\frac{30 \times 10 \operatorname{tg} x}{4} = 150$

5. Considere a linha do Triângulo de Pascal em que o segundo elemento é 35.
Escolhem-se, ao acaso, dois elementos dessa linha.
Qual é a probabilidade de estes dois elementos serem iguais?

- (A) $\frac{19}{{}^{35}C_2}$ (B) $\frac{35}{{}^{36}C_2}$ (C) $\frac{1}{{}^{35}C_2}$ (D) $\frac{18}{{}^{36}C_2}$

6. A Patrícia tem uma caixa com cinco bombons de igual aspecto exterior, mas só um é que tem licor. A Patrícia tira, ao acaso, um bombom da caixa, come-o e, se não for o que tem licor, experimenta outro. Vai procedendo desta forma até encontrar e comer o bombom com licor.

Seja X a variável aleatória «número de bombons **sem licor** que a Patrícia come».

Qual é a distribuição de probabilidades da variável X ?

(A)

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

(B)

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,4

(C)

x_i	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2

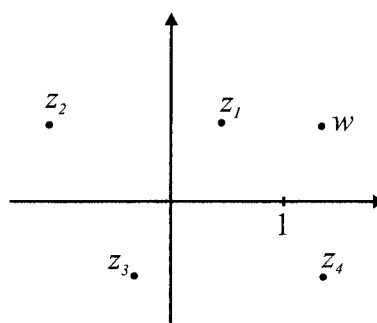
(D)

x_i	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,4

7. Na figura estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas de cinco números complexos:

w, z_1, z_2, z_3 e z_4

Qual é o número complexo que pode ser igual a $1 - w$?



- (A) z_1 (B) z_2 (C) z_3 (D) z_4

Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. • \mathbb{C} é o conjunto dos números complexos
• i designa a unidade imaginária

1.1. **Sem recorrer à calculadora**, calcule, na forma trigonométrica, as raízes quartas do número complexo $1 + \sqrt{3}i$, simplificando o mais possível as expressões obtidas.

1.2. Seja z um número complexo cuja imagem geométrica, no plano complexo, é um ponto A situado no segundo quadrante e pertencente à recta definida pela condição $Re(z) = -2$.

Seja B a imagem geométrica de \bar{z} , conjugado de z .

Seja O a origem do referencial.

Represente, no plano complexo, um triângulo $[AOB]$, de acordo com as condições enunciadas.

Sabendo que a área do triângulo $[AOB]$ é 8, **determine** z , na forma algébrica.

2. Admita que, ao longo dos séculos XIX e XX e dos primeiros anos do século XXI, a população de Portugal Continental, em milhões de habitantes, é dada, aproximadamente, por

$$p(t) = 3,5 + \frac{6,8}{1 + 12,8 e^{-0,036t}}$$

(considere que t é medido em anos e que o instante $t = 0$ corresponde ao **início** do ano 1864).

2.1. De acordo com este modelo, qual será a população de Portugal Continental no **final** do presente ano (2003)?

Apresente o resultado em milhões de habitantes, arredondado às décimas.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2.2. **Sem recorrer à calculadora** (a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos), resolva o seguinte problema:

De acordo com este modelo, em que ano a população de Portugal Continental foi de 3,7 milhões de habitantes?

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3. Considere a função f , de domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, definida por

$$f(x) = x + \sin x$$

Sem recorrer à calculadora, resolva as três alíneas seguintes.

- 3.1. Utilizando a definição de derivada de uma função num ponto, calcule $f'(0)$.
- 3.2. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.
- 3.3. Determine os valores de x , pertencentes ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, tais que
- $$f(x) = x + \cos x$$

4. De um baralho de cartas, seleccionam-se seis cartas do naipe de Espadas: Ás, Rei, Dama, Valete, Dez e Nove.

Dispõem-se as seis cartas, em fila, em cima de uma mesa.

- 4.1. Quantas disposições diferentes podem ser feitas, de modo que as duas cartas do meio sejam o Ás e o Rei (não necessariamente por esta ordem)?
- 4.2. Quantas disposições diferentes podem ser feitas, de modo que o Rei não fique ao lado da Dama?

5. Seja S o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Sabe-se que:

- $P(A \cap B) = 0,1$
- $P(A \cup B) = 0,8$
- $P(A|B) = 0,25$

Prove que A e \bar{A} são acontecimentos equiprováveis.

(P designa probabilidade, \bar{A} designa o acontecimento contrário de A e $P(A|B)$ designa probabilidade de A , se B).

6. A Rita está a participar num concurso de lançamentos de papagaios de papel.

No regulamento do concurso, estão as condições de apuramento para a final, que se reproduzem a seguir.

Após um certo instante, indicado pelo júri:

- o papagaio não pode permanecer no ar mais do que um minuto;
- o papagaio tem de permanecer, pelo menos durante doze segundos seguidos, a uma altura superior a dez metros;
- o papagaio tem de ultrapassar os vinte metros de altura.



Admita que a distância, em metros, do papagaio da Rita ao solo, t segundos após o instante indicado pelo júri, é dada por

$$d(t) = 9,5 + 7 \operatorname{sen}\left(\frac{t^2}{200}\right) + 5 \operatorname{cos}\left(\frac{t}{4}\right)$$

(os argumentos das funções seno e co-seno estão expressos em radianos).

Note-se que, a partir do instante em que o papagaio atinge o solo, a distância do papagaio ao solo deixa de ser dada por esta expressão, uma vez que passa a ser (naturalmente) igual a zero.

Deverá a Rita ser apurada para a final?

Utilize a calculadora para investigar esta questão. Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explicita as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. **Inclua, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos** (coordenadas arredondadas às décimas).

FIM

COTAÇÕES

Grupo I63

Cada resposta certa	+9
Cada resposta errada.....	- 3
Cada questão não respondida ou anulada	0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II137

1. 21
 1.1. 11
 1.2. 10

2. 26
 2.1. 10
 2.2. 16

3. 42
 3.1. 14
 3.2. 14
 3.3. 14

4. 20
 4.1. 10
 4.2. 10

5. 12

6. 16

TOTAL 200

Formulário

Áreas de figuras planas

$$\text{Losango: } \frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$$

$$\text{Trapézio: } \frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$$

$$\text{Polígono regular: } \text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$$

$$\text{Círculo: } \pi r^2 \quad (r - \text{raio})$$

Áreas de superfícies

$$\text{Área lateral de um cone: } \pi r g \\ (r - \text{raio da base; } g - \text{geratriz})$$

$$\text{Área de uma superfície esférica: } 4 \pi r^2 \\ (r - \text{raio})$$

Volumes

$$\text{Prisma: } \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Cilindro: } \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Pirâmide: } \frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Cone: } \frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Esfera: } \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (r - \text{raio})$$

Trigonometria

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$$

$$\text{cos}(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$$

$$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

Complexos

$$(\rho \text{ cis } \theta) \cdot (\rho' \text{ cis } \theta') = \rho \rho' \text{ cis } (\theta + \theta')$$

$$\frac{\rho \text{ cis } \theta}{\rho' \text{ cis } \theta'} = \frac{\rho}{\rho'} \text{ cis } (\theta - \theta')$$

$$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis } (n \theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{ cis } \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \{0, \dots, n-1\}$$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

$$\text{Prog. Aritmética: } \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$$

$$\text{Prog. Geométrica: } u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\text{sen } u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \text{sen } u$$

$$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$