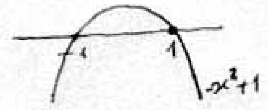
EXAME 435 5/09/2003 VERSÃO 1

1.ª PARTE

1- (C) -> 2 soluções

2- $A = D_g = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 > 0\} =]-1, 1[$ (B)



3- O gráfico da função g pode ser obtido pela translação associada ao vector $(-1, 0)$ do gráfico da função f. Ao efectuar essa translação de uma unidade para o lado esquerdo, a ordenada na origem da assimptota (~~recta~~) oblíqua será superior a 4. Logo, a opção correcta é a (A) -> $y = 2x + 6$.

4- $A_{\triangle} = \frac{30 + 10}{2} \times 10 = 200$ u.a.

seja $h = \overline{AP}$ então $A_{[APD]} = \frac{30h}{2}$

$h = 30 \operatorname{tg} x$ logo,

$$100 = \frac{30 \times 30 \operatorname{tg} x}{2} \Leftrightarrow \boxed{100 = \frac{30^2 \operatorname{tg} x}{2}} \rightarrow (B)$$

5- A linha em causa é a 35.ª.
A 35.ª Linha tem 36 elementos e os elementos equidistantes dos extremos são iguais 2 a 2. Assim, temos 18 pares formados por elementos iguais. Então, a probabilidade de escolher dois elementos iguais é dada por $\boxed{\frac{18}{{}^{36}C_2}} \rightarrow$ (D)

6- P("comer zero bombons sem licor") = P("comer o bombom com licor logo no início") $= \frac{1}{5} = 0{,}2 = P(x=0)$

P("comer 1 bombom sem licor) = P("comer o bombom com licor em 2.º lugar") =
$= \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = 0{,}2 = P(x=1)$

⋮

A opção correcta é a (A)

7- $w = a + bi$, com $a > 1$ e $b > 0$

$1 - w = 1 - (a + bi) = \underbrace{1 - a}_{<0} - bi$

$(1-w) \in 3.°$ Quadrante, então, $1-w$ pode ser igual a $z_3 \rightarrow$ C

2.ª PARTE

1.1) $tg\,\theta = \sqrt{3}$ e $\theta \in 1.° Q$, logo $\theta = \frac{\pi}{3}$

$\rho = \sqrt{1+3} = 2$

$1 + \sqrt{3}\,i = 2 \text{ cis } \frac{\pi}{3}$

$\sqrt[4]{2 \text{ cis } \frac{\pi}{3}} = \sqrt[4]{2} \text{ cis } \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{4}$, $k \in \{0, \ldots, 3\}$ =

$= \sqrt[4]{2} \text{ cis}\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right)$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

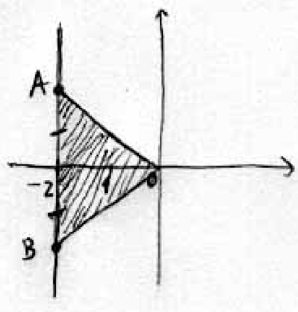
Para: $k=0$, $z_0 = \sqrt[4]{2} \text{ cis}\left(\frac{\pi}{12}\right)$

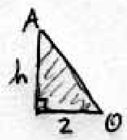
$k=1$, $z_1 = \sqrt[4]{2} \text{ cis}\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

$k=2$, $z_2 = \sqrt[4]{2} \text{ cis}\left(\frac{13\pi}{12}\right)$

$k=3$, $z_3 = \sqrt[4]{2} \text{ cis}\left(\frac{19\pi}{12}\right)$

1.2





$\frac{b \times h}{2} = 4 \Leftrightarrow \frac{2h}{2} = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h = 4$ então,

$\boxed{z = -2 + 4i}$

2.1 $t = 2003 - 1864 + 1 = 140$ anos.

$P(140) = 3{,}5 + \frac{6{,}8}{1 + 128\,e^{-0{,}036 \times 140}} = 9{,}8$ milhões de habitantes.

2.2 $P(t) = 3{,}7 \Leftrightarrow 3{,}5 + \dfrac{6{,}8}{1+12{,}8\, e^{-0{,}036t}} = 3{,}7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6{,}8 = 0{,}2 + 2{,}56\, e^{-0{,}036t} \Leftrightarrow e^{-0{,}036t} = 2{,}578 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(2{,}578) = -0{,}036t \Leftrightarrow t = -\dfrac{\ln(2{,}578)}{0{,}036} \Leftrightarrow t = -26{,}306$

$t = 0 \to$ início de 1864
$t = -1 \to$ " " 1863
$t = -2 \to$ " " 1862
$\vdots$
$t = -26 \to$ " " 1838
$t = -26{,}306 \to$ $\boxed{\text{Ano } \mathbf{1837}}$
$t = -27 \to$ início de 1837

A população foi de 3,7 milhões de habitantes no ano 1837

3.1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x} = 2$

3.2 $f'(x) = 1 + \cos x$
$f''(x) = -\operatorname{sen} x$
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
para: $k = 0;\ x_0 = 0$
$k = 1;\ x_1 = \pi$

	$-\frac{\pi}{2}$		0		π		$\frac{3\pi}{2}$
$f''(x)$	+	+	0	−	0	+	+
$f(x)$		$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$	

$\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \to$ concavidade voltada para cima
$]0, \pi[\to$ concavidade voltada para baixo.

$f(0) = 0$ Pontos de inflexão: $(0,0)$ e (π, π)
$f(\pi) = \pi$

3.3 $x + \operatorname{sen} x = x + \cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \cos x \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + 2K\pi \ \vee \ x = \pi - \frac{\pi}{2} + x + 2K\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + K\pi, \ K \in \mathbb{Z}$

Para: $K = -1$; $x = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

$K = 0$; $x = \frac{\pi}{4}$

$K = 1$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

$S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

4.1

_ _ A R _ _   _ _ R A _ _

$2 \times P_4 = 2 \times 4! = 48$

4.2 R _ _ _ _ _

→ A dama não pode estar nesta posição mas pode ocupar qualquer uma das outras 4 posições.

$4 \times P_4$

→ se o Rei estiver no final temos outros $4 \times P_4$ casos.

→ _ R _ _ _ _

A dama não pode estar nestas posições mas pode ocupar qualquer uma das 3 restantes então temos

$3 \times P_4$

O mesmo se passa ~~para qualquer uma~~ se o rei ocupar uma das 3 posições seguintes. Então, o total de casos nas condições pedidas é:

$2(4 \times P_4) + 4(3 \times P_4) = 20 \times P_4 = 480$

(5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$0{,}8 = P(A) + P(B) - 0{,}1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A) + P(B) = 0{,}9$

$\begin{cases} P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ 0{,}25 = \dfrac{0{,}1}{P(B)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P(B) = 0{,}4 \end{cases}$

$P(A) + 0{,}4 = 0{,}9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A) = 0{,}5$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0{,}5$

Como $P(A) = P(\bar{A})$, A e $\bar{A}$ são equiprováveis.

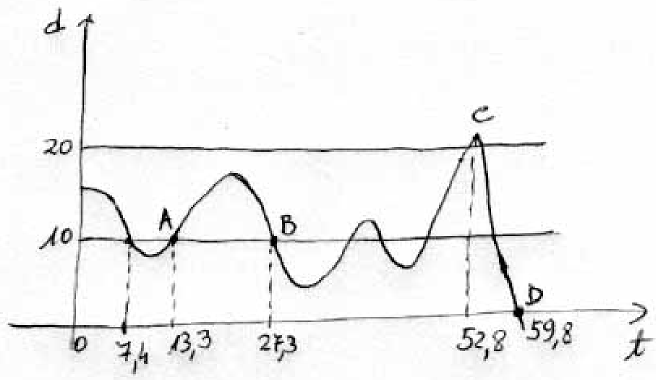
(6) Começamos por representar graficamente as funções

$y = 9{,}5 + 7 \operatorname{sen}\left(\frac{t^2}{200}\right) + 5\cos\left(\frac{t}{4}\right)$;

$y = 10$;

$y = 20$;

$y = 0$



A Rita deve ser apurada porque:

- O papagaio não esteve mais de um minuto no ar visto que passados 59,8 segundos tocou o solo (D)
- O papagaio, entre os instantes 13,3 s e 27,3 s esteve mais de 12 segundos seguidos acima dos 10 metros de altura.
- O papagaio ultrapassou os 20 metros de altura porque o ponto C tem coordenadas (52,8 ; 20,4).