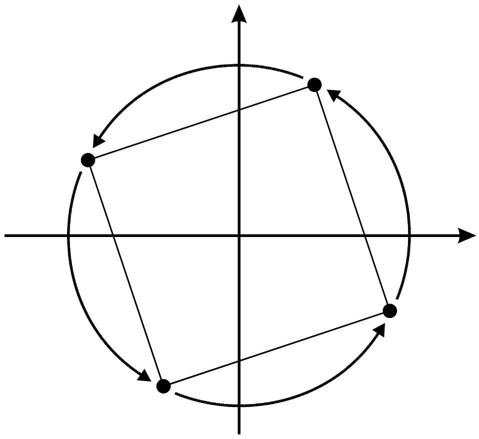
**1.**

**a)** No plano complexo, as imagens geométricas das raízes quartas de um número complexo $z$ (não nulo) são os vértices de um quadrado com centro na origem do refencial.

Portanto, a partir da imagem geométrica de uma das raízes quartas de $z$, podemos obter as imagens geométricas das restantes raízes quartas de $z$, através de rotações de centro na origem do referencial e amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos.



Ora, aplicar, à imagem geométrica de um número complexo, uma rotação de centro na origem do referencial e amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos corresponde a multiplicar esse número complexo por $i$.

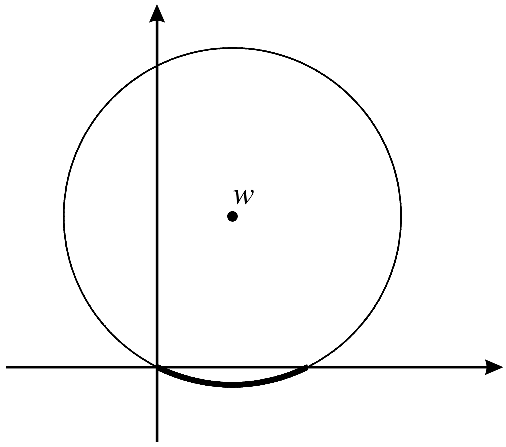
Portanto, a partir do conhecimento de uma das raízes quartas de $z$, podemos obter as restantes raízes quartas de $z$, através de sucesivas multiplicações por $i$.

Tem-se:

- $wi = (1 + 2i)\,i = i + 2i^2 = -2 + i$
- $(-2 + i)\,i = -2i + i^2 = -1 - 2i$
- $(-1 - 2i)\,i = -i - 2i^2 = 2 - i$

As restantes raízes quartas de $z$ são, portanto, $-2 + i$, $-1 - 2i$ e $2 - i$.

**b)** Na figura está representada a circunferência de centro na imagem geométrica de $w$ e que passa na origem do referencial, bem como, a traço mais grosso, a parte desta circunferência que está contida no quarto quadrante.




O raio da circunferência é igual à distância da imagem geométrica de $w$ à origem do referencial, ou seja, é igual ao módulo de $w$.

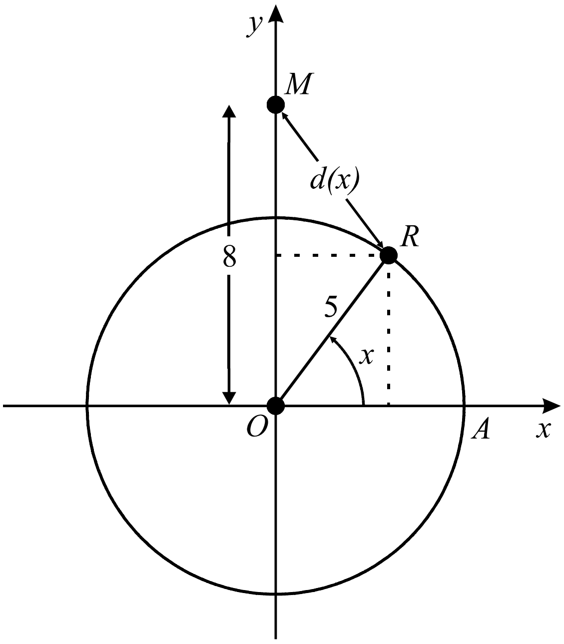
Tem-se que $|w| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

Por isso, uma condição que define a parte da circunferência que está contida no quarto quadrante (eixos não incluídos) é, por exemplo,

$$|z - (1 + 2\,i)| = \sqrt{5} \quad \wedge \quad Im(z) < 0$$

**2.**

**a)** Consideremos um referencial o. n. com origem em $O$, cujo eixo das abcissas contém o ponto $A$ e cujo eixo das ordenadas contém o ponto $M$.




Tem-se que o ponto $R$ tem coordenadas $(5\cos x, 5\,\text{sen}\,x)$ e o ponto $M$ tem coordenadas $(0,\,8)$.

Por isso,

$$d(x) = \overline{RM} = \sqrt{(5\cos x \; - \; 0)^2 + (5\,\text{sen}\, x - 8)^2} \quad =$$

$$= \sqrt{(5\cos x\,)^2 + (5\,\text{sen}\, x - 8)^2} \quad =$$

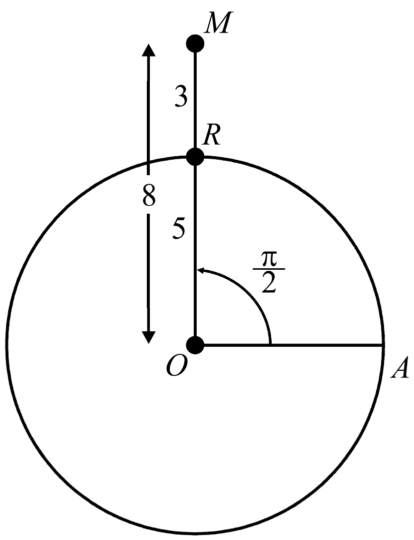
$$= \sqrt{25\;\cos^2 x \;+\; 25\,\text{sen}^2\, x - 80\,\text{sen}\, x \;+\; 64} \quad =$$

$$= \sqrt{25\;(\cos^2 x \;+\; \text{sen}^2\, x) - 80\;\text{sen}\, x \;+\; 64} \quad =$$

$$= \sqrt{25\; - 80\,\text{sen}\, x \;+\; 64} \quad = \quad \sqrt{89\; - 80\;\text{sen}\, x}$$

**b)** $d\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{89\; - 80\;\;\text{sen}\,\frac{\pi}{2}} \;=\; \sqrt{89\; - 80} \;=\; \sqrt{9} \;=\; 3$

Interpretação: quando $x = \frac{\pi}{2}$ os pontos $O$, $R$ e $M$ são colineares, pelo que $\overline{RM} = 3$.




**3.**

**a)** $f'(x) = \dfrac{\left(x + \frac{1}{x}\right)'}{x + \frac{1}{x}} = \dfrac{1 - \frac{1}{x^2}}{x + \frac{1}{x}} = \dfrac{\frac{x^2 - 1}{x^2}}{\frac{x^2 + 1}{x}} = \dfrac{x^2 - 1}{x\,(x^2 + 1)}$

Como o domínio da função $f$ é, de acordo com o enunciado, $\mathbb{R}^+$, tem-se que

$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 \,-\, 1 = 0 \quad \wedge \quad x > 0 \;\Leftrightarrow\; x = 1$

Tem-se, assim,

| $x$ | $0$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | n.d. | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | n.d. | $\searrow$ | mín. | $\nearrow$ |

n.d. - não definida

Concluímos assim que $f$ é decrescente em $]0,1]$ e crescente em $[1,+\infty[$.
Concluímos também que $f(1)$ é o único mínimo de $f$.

**b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(x+\frac{1}{x}\right)-\ln x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{x}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) = \ln(1+0) = 0$

**4.**
**a)** $g(x) = (x-x_0)^2(ax^2+bx+c)$

Como $g(x_0)=0$, o eixo $Ox$ será tangente ao gráfico de $g$, no ponto de abcissa $x_0$, se, e só se, $g'(x_0)=0$.

Tem-se que

$g'(x) = [(x-x_0)^2]' \,.\, (ax^2+bx+c) \;+\; (x-x_0)^2 \,.\, (ax^2+bx+c)' =$

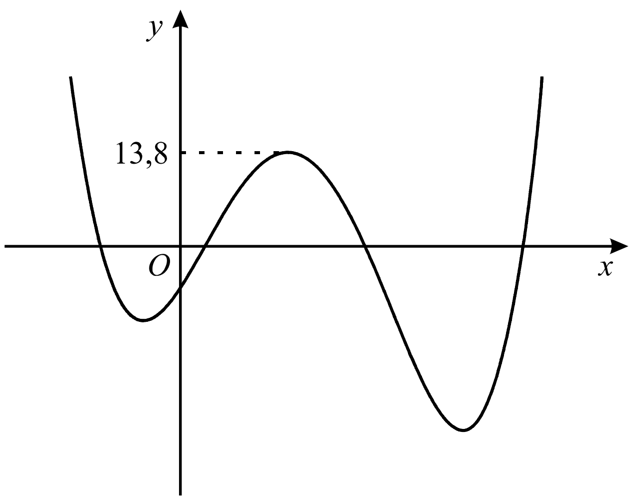
$= 2\,(x-x_0)\,(x-x_0)' \,.\, (ax^2+bx+c) \;+\; (x-x_0)^2 \,.\, (2ax+b) =$

$= 2\,(x-x_0)\,(ax^2+bx+c) \;+\; (x-x_0)^2\,(2ax+b)$

Portanto, $g'(x_0) = 2\,(x_0-x_0)\,(a\,x_0^2+b\,x_0+c) \;+\; (x_0-x_0)^2\,(2\,a\,x_0+b) =$

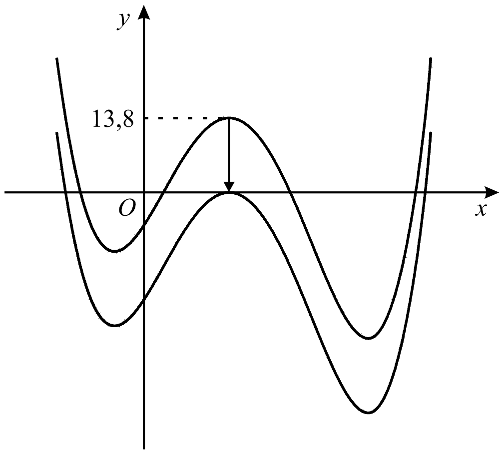
$= 2 \times 0 \times (a\,x_0^2+b\,x_0+c) \;+\; 0 \times (2\,a\,x_0+b) = 0+0 = 0$

**b)** Na figura está representada parte do gráfico da função $A$ definida por
$A(x) = x^4-7x^3+7x^2+15x-6$




(o gráfico foi obtido com recurso à calculadora, na janela $[-3,6]\times[-30,25]$).

O polinómio $B(x) = A(x) - k$ tem três raízes reais distintas se, e só se, uma delas for dupla e as outras duas forem simples. Pela alínea anterior, uma raiz dupla corresponde a um ponto onde o eixo $Ox$ é tangente ao gráfico da função definida por $B(x) = A(x) - k$, gráfico esse que se obtém, a partir do gráfico da função definida por $A(x)$, através de uma translacção associada ao vector $(0, -k)$.




Portanto, o número real positivo $k$ para o qual o polinómio $B(x) = A(x) - k$ tem três raízes reais distintas é $13{,}8$ (valor arredondado às décimas, tal como pedido no enunciado).

**5.**

**a)** Em 40% dos dias, é o Manuel Silva que vai comprar o pão. Nos restantes dias, ou seja, em 60% dos dias, é a Adelaide Silva que se encarrega dessa tarefa. Como 60% $>$ 40%, é mais provável que o vizinho da família Silva encontre a Adelaide.

**b)** Designemos por $A$ e $C$ os acontecimentos:
$A$ - A Adelaide vai à padaria;
$C$ - O pão que é comprado é de centeio.

A probabilidade de que, num dia escolhido ao acaso, seja a Adelaide a ir à padaria e traga pão de centeio é $P(A \cap C)$.

Tem-se que: $P(A \cap C) = P(A) \times P(C|A) = 60\,\% \times 80\,\% = 48\,\%$

**6.**

De acordo com a sugestão, comecemos por elaborar uma tabela onde figurem todas as somas possíveis (no lançamento de dois dados).

| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| **2** | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| **3** | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| **4** | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| **5** | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| **6** | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Um jogo possível, de acordo com o enunciado, é o seguinte:

*Participam dois jogadores, que apostam uma quantia fixa por cada jogada.*

*Lançam-se, em simultâneo, dois dados. Se a soma dos números saídos for:*

- *2 ou 12, o montante apostado reverte a favor do casino*;
- *7, o montante apostado transita para a jogada seguinte*;
- *3, 4, 5 ou 6, ganha o jogador A*;
- *8, 9, 10 ou 11, ganha o jogador B*.

*A probabilidade de o casino ganhar é de* $\frac{2}{36}$ *, ou seja, cerca de* $6$*%.*

*A probabilidade de o montante apostado transitar para a jogada seguinte é de* $\frac{6}{36}$ *, ou seja, cerca de* $17$*%.*

*A probabilidade de o jogador A ganhar é igual à probabilidade de o jogador B ganhar, sendo essa probabilidade* $\frac{14}{36}$ *, ou seja, cerca de* $39$*%.*