PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO EXAME NACIONAL DE MATEMÁTICA (PROVA 435)

Grupo I

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	B	C	B	C	C	A	C
Versão 2	A	B	D	C	A	D	A

Grupo II

1.

$$\frac{z_1 + i^{23}}{z_2} = \frac{-6+3i-i}{1-2i} = \frac{-6+2i}{1-2i} = \frac{(-6+2i)(1+2i)}{1+4} = -2-2i$$

$$p = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-2}{-2} = 1, \quad \theta \in 3^{\text{o}} \text{ Quadrante}$$

logo

$$\theta = \frac{5\pi}{4}$$

R: $2\sqrt{2}\text{cis}\frac{5\pi}{4}$

2. Seja $z = p\text{cis}\theta$; então $z^3 = p^3\text{cis}\,(3\theta)$

Se a imagem geométrica de z pertence ao primeiro quadrante, então

$$0 < \theta < \frac{\theta}{2}.$$

Logo

$$0 < 3\theta < \frac{3\pi}{2}$$

e a imagem geométrica de z^3 estará por isso nos quandrantes um, dois e três, logo não pode pertencer ao quarto quadrante.

3.

3.1 Retirando simultaneamente e ao acaso duas moedas do bolso, o João poderá obter duas moedas de 1 euro, duas moedas de 50 cêntimos ou 1 moeda de cada um dos valores; consequentemente poderá perfazer a quantia de 2 euros, 1 euro ou 1,5 euros. Calcular a probabilidade de obter cada uma destas quantias equivale a calcular a probabilidade de retirar duas moedas nas condições referidas.

Sendo X a variável definida no enunciado, vem:

$$p(X=2)=\frac{^2C_2}{^6C_2}=\frac{1}{15}$$

$$p(X=1)=\frac{^4C_2}{^6C_2}-\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$$

$$p(X=1,5)=\frac{^2C_1\times ^4C_1}{^6C_2}=\frac{8}{15}$$

Em resumo, a tabela pedida é:

x_i	2	1,5	1
$p(x=x_i)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{5}$

3.2. Estão em jogo dois acontecimentos:

A: “as moedas retiradas são iguais”

B: “a quantia retirada é de 2 euros”

Calcular a probabilidade de a Inês ganhar a aposta equivale a calcular a probabilidade de ocorrer o acontecimento B sabendo que ocorreu o acontecimento A. Trata-se, por isso, de calcular uma probabilidade condicionada, $p(B/A)$.

Posto isto, basta calcular a probabilidade de obter a quantia de 2 euros, sabendo que sairam duas moedas iguais:

número de casos possíveis: $^4C_2+{}^2C_2=7$ número de casos favoráveis: $^2C_2=1$

$$p(B/A)=\frac{1}{7}$$

4.

4.1. A resposta depende do estudo da monotonia da função $f(x)=1+3x^2e^{-x}$

$$f'(x)=6xe^{-x}-3x^2e^{-x}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 3e^{-x}(2x-x^2)=0\Leftrightarrow 3e^{-x}=0\vee 2x-x^2=0\Leftrightarrow x(2-x)=0\Leftrightarrow x=0\vee x=2$$

Atendendo a que $e^x > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$, o sinal de $f'(x)$ coincide com o de $2x - x^2$.

x	$+\infty$	0		2	$-\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	m	$\nearrow$	M	$\searrow$

Por esta tabela se prova que existe um único mínimo cujo valor é $f(0)$, ou seja, é 1.

4.2. Trata-se de confirmar que existe um original, x, entre -1 e 0 tal que $f(x) = 4$.

A função $f(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$ (resulta de operações não restritivas de continuidade sobre funções contínuas) logo é contínua em $[-1, 0]$ e, consequentemente, a função $g(x)$, definida por, $f(x) - 4$, também o é.

Falta agora calcular $g(-1)$ e $g(0)$ para verificar todas as condições do corolário do Teorema de Bolzano

$$g(-1) = -3 + 3e > 0 \qquad g(0) = -3 < 0$$

Como $g(-1)$ e $g(0)$ são de sinais contrários, podemos concluir que $g(x)$ admite pelo menos um zero em $]-1, 0[$. Consequentemente existe pelo menos um objecto nas condições referidas pelo enunciado.

5. $v(x) = 80\ (x - \operatorname{sen} x), x \in [0, 2\pi]$

5.1. Basta calcular $v(2\pi)$ e arredondar o resultado às unidades.

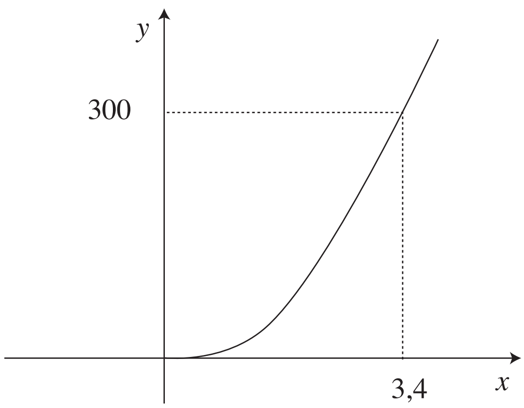
$$v(2\pi) = 160\pi \approx 502,655$$

R: a capacidade é aproximadamente igual a $503\mathrm{m}^3$

5.2. Uma equação que permite resolver o problema é $v(x) = 300$.

Determinar graficamente a solução desta equação corresponde a determinar a abcissa do ponto de intersecção das funções $v(x) = 80\ (x - \operatorname{sen}\ x)$ e $v(x) = 300$, ou seja, a abcissa dos pontos pertencente ao gráfico da função dada cuja ordenada é 300.

Inserindo estas funções na calculdora, pedindo o gráfico com uma janela de visualização de, por exemplo, $[0, 2\pi] \times [0, 503]$, a máquina mostra



Recorrendo às potencialidades da calculadora a abcissa de P é aproximadamente igual a $3,4$. Portanto, a amplitude do arco pedido é de, aproximandamente, $3,4$ radianos.

5.3. Em primeiro lugar há que calcular a amplitude de x para a qual a altura de enchimento atinge metade do valor do raio da base do depósito, o que equivale a resolver a equação

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{1/2r}{r} \quad (r\text{: comprimento do raio da base})$$

Daqui resulta

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2},$$

portanto

$$x = \frac{2\pi}{3}$$

Substituíndo em $v(x)$ e aplicando o arredondamento pedido obtém-se 98m^3.

5.4. A resposta correcta é o gráfico B.

A solução não pode ser o gráfico D, pois este correspondia à situação de um depósito cuja altura de enchimento fosse directamente proporcional ao tempo decorrido.

Não pode ser o gráfico C pois se a altura regressasse ao zero o depósito não ficaria cheio.

O gráfico A exibe uma taxa de variação de altura mais baixa no início e no fim do enchimento do que no tempo intermédio, o que é contrariado pela posição escolhida para um depósito com a forma descrita, logo também não é solução.

FIM