EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos — **2.ª FASE**

2004 — **VERSÃO 1**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui seis questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de onze.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ $\quad$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\, maior \times Diagonal\, menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\, maior + Base\, menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $\quad$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\; cis\, \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}$, $k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\, v + u\,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\, v - u\,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\, u^{n-1}\,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\, \cos u$

$(\cos u)' = -\, u'.\, \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\, e^u$

$(a^u)' = u'.\, a^u.\, \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\, \ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Indique o valor de p para o qual se verifica a igualdade $\log_p 16 = 4$

(A) -4 **(B)** 4 **(C)** 2 **(D)** $\sqrt{2}$

2. Sabe-se que:

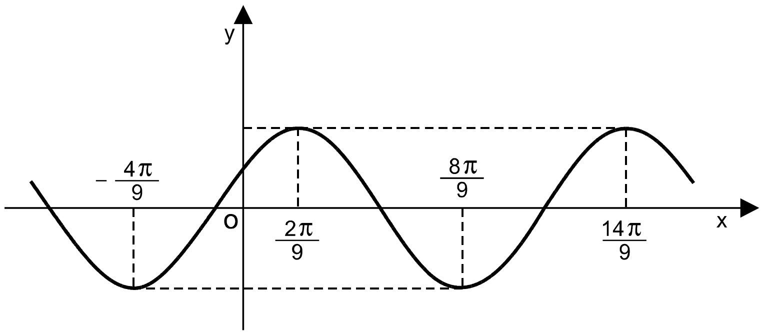
- o **nível de álcool** no sangue de uma pessoa, uma hora depois de ter tomado uma bebida alcoólica, é, numa certa unidade, igual ao quociente entre o peso do álcool ingerido (em gramas) e 70% do peso dessa pessoa (em quilogramas).
- num decilitro de um certo tipo de vinho existem 5 gramas de álcool.

Qual das expressões seguintes dá o **nível de álcool** no sangue de uma pessoa, em função do seu peso x (em quilogramas), uma hora depois de essa pessoa ter bebido dois decilitros desse vinho?

(A) $\frac{10}{70\,x}$ **(B)** $\frac{10}{0{,}7\,x}$

(C) $\frac{2}{70\,x}$ **(D)** $\frac{2}{0{,}7\,x}$

3. Na figura está representada parte do gráfico de uma função periódica.

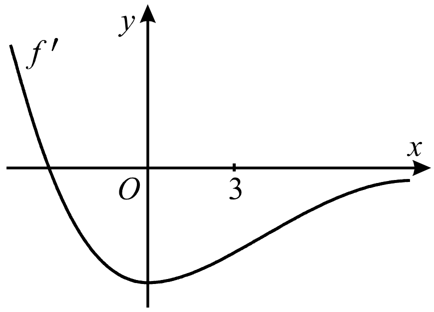


Qual dos valores seguintes poderá ser período desta função?

(A) $\frac{\pi}{9}$ **(B)** $\frac{2\pi}{9}$ **(C)** $\frac{2\pi}{3}$ **(D)** $\frac{4\pi}{3}$

4. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio.

Na figura junta encontra-se parte do gráfico de f', função derivada de f.



Sabe-se ainda que $f(0) = 2$

Qual pode ser o valor de $f(3)$?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 5 **(D)** 7

5. De quantas maneiras distintas podem ficar sentados três rapazes e quatro raparigas num banco de sete lugares, sabendo que se sentam alternadamente por sexo, ou seja, cada rapaz fica sentado entre duas raparigas?

(A) 121 **(B)** 133 **(C)** 144 **(D)** 156

6. Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).
Sabe-se que:

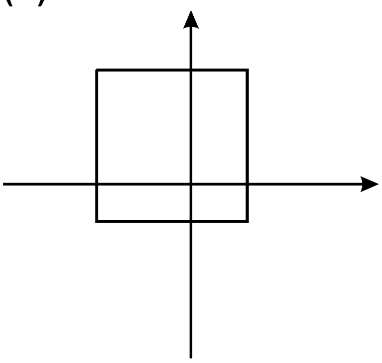
$$P(A) = 0{,}3 \qquad P(A \cap B) = 0{,}1 \qquad P(A \cup B) = 0{,}8$$

Qual é o valor de $P(\overline{B})$?

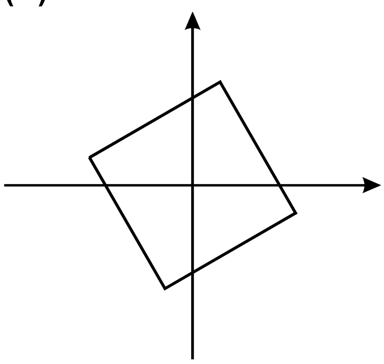
(A) $0{,}1$ **(B)** $0{,}2$ **(C)** $0{,}3$ **(D)** $0{,}4$

7. Os quatro vértices de um dos quadriláteros seguintes são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes quartas de um certo número complexo w.
Qual poderá ser esse quadrilátero?

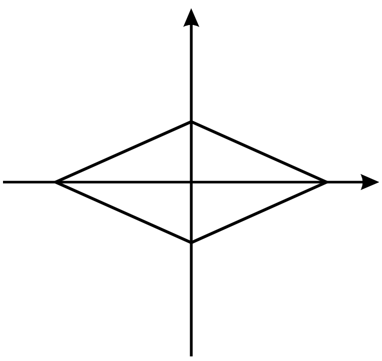
(A)



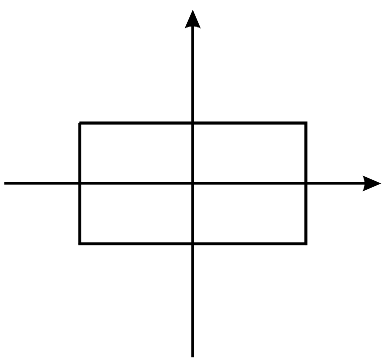
(B)



(C)



(D)



Grupo II

Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$w = 4 - 3\,i$ (i designa a unidade imaginária)

1.1. **Sem recorrer à calculadora**, calcule, na forma algébrica, $2\,i + \dfrac{w^2}{i}$

1.2. Seja α um argumento do número complexo w.
Exprima, na forma trigonométrica, em função de α, o produto de i pelo conjugado de w.

2. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$

2.1. **Sem recorrer à calculadora**, resolva as duas alíneas seguintes:

2.1.1. Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

2.1.2. Estude a função f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados.

2.2. O conjunto solução da inequação $f(x) \leq 3 + \ln x$ é um intervalo fechado $[a, b]$ ($\ln$ designa logaritmo de base e).
Recorrendo à sua calculadora, determine, **graficamente**, valores para a e b, arredondados às centésimas.
Nota: apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente, o **gráfico** ou **gráficos** obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos.

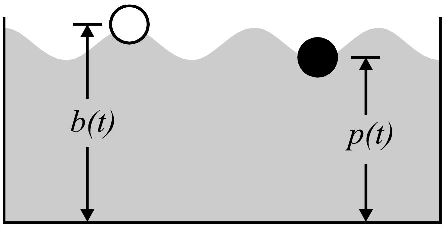
3. Duas bolas de plástico com o mesmo raio, uma branca e outra preta, flutuam na superfície de um líquido contido num recipiente.

Por acção de uma força exterior, o líquido perdeu o estado de repouso em que se encontrava, tendo a distância de cada uma das bolas à base do recipiente deixado de ser constante.

Designando por $b(t)$ e $p(t)$ as distâncias, em cm, dos centros das bolas (branca e preta, respectivamente) à base do recipiente, t segundos após o início da perturbação, admita que se tem:

$$b(t) = 10 + e^{-0,1\,t}\,\text{sen}\,(\pi\, t)\,, \qquad t \geq 0$$

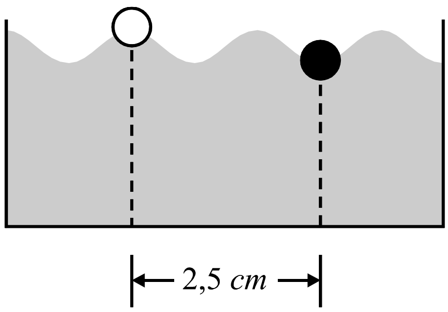
$$p(t) = 10 - 1{,}37\,e^{-0,1\,t}\,\text{sen}\,(\pi\, t)\,, \qquad t \geq 0$$



3.1. **Sem recorrer à calculadora**, resolva o seguinte problema:

Durante os primeiros cinco segundos após o início da perturbação (instantes 0 e 5 incluídos), houve alguns instantes em que as duas bolas estiveram a igual distância da base do recipiente. Quantas vezes isso aconteceu?

3.2. Determine a distância que vai do **centro da bola branca** ao **centro da bola preta**, meio segundo após o início da perturbação, sabendo que, nesse instante, a distância entre as respectivas projecções horizontais (na base do recipiente) é de $2{,}5\ cm$. Apresente o resultado em cm, arredondado às décimas.



Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

4. Considere, para cada $\alpha \in \,]0, 1[$, a função, de **domínio** $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x^\alpha$

Prove que, qualquer que seja o valor de $\alpha \in \,]0, 1[$, o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo.

5. Lança-se um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

5.1. Considere os acontecimentos A e B:
A – «sai face par»;
B – «sai um número menor do que 4».

Indique o valor da probabilidade condicionada $P(B|A)$. **Justifique** a sua resposta.

5.2. Considere agora que o dado é lançado três vezes.
Qual é a probabilidade de a face 6 sair, pela primeira vez, precisamente no terceiro lançamento?
Apresente o resultado sob a forma de percentagem, arredondado às décimas.

6. Considere o seguinte problema:

Um saco contém doze bolas, indistinguíveis ao tacto: três bolas com o número 1, cinco bolas com o número 2 e quatro bolas com o número 3. Retiram-se, do saco, três bolas, ao acaso. Qual é a probabilidade de a soma dos números saídos ser igual a cinco?

Uma resposta correcta para este problema é $\dfrac{{}^3C_2 \times 4 + {}^5C_2 \times 3}{{}^{12}C_3}$

Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explique esta resposta.

Nota:

Deve organizar a sua composição de acordo com os seguintes tópicos:
· referência à Regra de Laplace;
· explicação do número de casos possíveis;
· explicação do número de casos favoráveis.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada.. - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
- **1.1.** 11
- **1.2.** 10

2. 42
- **2.1.** 28
  - **2.1.1.** 14
  - **2.1.2.** 14
- **2.2.** 14

3. 28
- **3.1.** 14
- **3.2.** 14

4. 14

5. 20
- **5.1.** 10
- **5.2.** 10

6. 12

TOTAL **200**