EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**

2004

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada.. - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II **137**

1. 21
- **1.1.** 11
- **1.2.** 10

2. 42
- **2.1.** 28
  - **2.1.1.** 14
  - **2.1.2.** 14
- **2.2.** 14

3. 28
- **3.1.** 14
- **3.2.** 14

4. 14

5. 20
- **5.1.** 10
- **5.2.** 10

6. 12

TOTAL **200**

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Versão 1	C	B	D	A	C	D	B
Versão 2	D	B	A	A	D	B	D

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, no primeiro grupo, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas / **Resp. certas**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3		
3	27	24	21	18	15			
4	36	33	30	27				
5	45	42	39					
6	54	51						
7	63							

Grupo II

Critérios gerais

1. A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro, não negativo, de pontos.

2. Se, numa alínea em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, o examinando se limitar a apresentar o resultado final, deverão ser atribuídos zero pontos a essa alínea.

3. Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

4. Existem alíneas cuja cotação está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para as resolver.

   4.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.

   4.2. Caso a resolução da etapa esteja incompleta, ou contenha incorrecções, cabe ao classificador decidir a cotação a atribuir a essa etapa, tendo em conta o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
   - erros de contas ocasionais devem ser penalizados em um ponto;
   - erros graves, que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades, devem ser penalizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa.

   4.3. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.

   4.4. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.

   4.5. Pode acontecer que o examinando, ao resolver uma questão, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

5. Existem alíneas em que estão previstos alguns erros que o examinando pode cometer. Para cada caso, é indicada a cotação a atribuir. O examinando pode, contudo, utilizar um processo não contemplado nos critérios e/ou cometer um erro não previsto. Cabe ao classificador adaptar as referências dadas a todas as situações não previstas.

6. Se, na resolução de uma alínea, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), deve ser penalizado em um ponto, na cotação total a atribuir a essa alínea. Esta penalização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas cotadas com 0 (zero) pontos.

7. Se, na resolução de uma alínea, o examinando não respeitar uma eventual instrução, relativa ao método a utilizar (por exemplo, se o enunciado vincular o examinando a uma resolução analítica, sem calculadora, e o examinando a utilizar), a etapa da resolução em que se dá o referido desrespeito bem como todas as subsequentes que dela dependam devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.

8. Tudo o que o examinando escrever fora de contexto e que não resulte de trabalho anterior (por exemplo, num exercício de probabilidades, a escrita de uma fracção que não tenha nada a ver com o problema, ou, num exercício de estudo da monotonia de uma função, a apresentação de um quadro fora do contexto) deve ser cotado com 0 (zero) pontos. Todas as etapas subsequentes que dependam do que o examinando escreveu fora de contexto devem ser igualmente cotadas com 0 (zero) pontos.

Critérios específicos

Para cada item são apresentados:

- a cotação total do item;
- para cada processo de resolução apresentado, uma subdivisão da cotação total em cotações parcelares;
- exemplos de possíveis respostas dos examinandos, com a respectiva cotação a atribuir, devidamente explicada.

1.1. 11

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

<u>1.º Processo</u>

Substituição, na expressão $2\,i + \dfrac{w^2}{i}$, de w por $4-3i$ 1

Cálculo de $(4-3i)^2$ 4

Desenvolvimento do quadrado da diferença 2

Restantes cálculos 2

Divisão por i 5

Multiplicação de ambos os termos da fracção por um factor conveniente ($-i$ ou i), **ou** decomposição da fracção numa soma de fracções 1

Restantes cálculos 4

Adição do resultado obtido a $2\,i$ 1

<u>2.º Processo</u>

Substituição, na expressão $2\,i + \dfrac{w^2}{i}$, de w por $4-3i$ 1

Cálculo de $(4-3i)^2$ 4

Desenvolvimento do quadrado da diferença 2

Restantes cálculos 2

$2i = \dfrac{2\,i^2}{i}$ e adição das fracções 2

Divisão por i 4

Multiplicação de ambos os termos da fracção por um factor conveniente ($-i$ ou i), **ou** decomposição da fracção numa soma de fracções 1

Restantes cálculos 3

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$2\,i\,+\,\frac{w^2}{i}\Leftrightarrow 2\,i\,+\,\frac{(4-3i)^2}{i}\Leftrightarrow 2\,i\,+\,\frac{16-24\,i+9\,i^2}{i}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\,i\,+\,\frac{16-24\,i-9\,i}{i}\Leftrightarrow\frac{-2+16-24\,i-9\,i}{i}\Leftrightarrow\frac{14-33\,i}{i}$$

Cotação a atribuir (2.º processo): $1+2\,(2+0)\,+\,2\,+0\,(0+0)+(\,-\,1)^{(*)}=4$

(*) Deve ser descontado 1 ponto, na cotação total a atribuir à resposta, pois o examinando utiliza simbologia inequivocamente incorrecta (escreve o símbolo de equivalência onde deveria estar o símbolo de igualdade) - ver critério geral 6.

Exemplo 2

$$2\,i\,+\,\frac{w^2}{i}=2\,i\,+\,\frac{4-3i}{i}=\frac{2\,i^2+4-3\,i}{i}=2\,i\,+\,\frac{4}{i}\,-3$$

Cotação a atribuir (2.º processo): $0^{(*)}\,+0\,(0+0)+\,0^{(**)}+1\,(1+0)=1$

(*) Substituição incorrecta, na medida em que o examinando escreve $4-3i$ em vez de $(4-3i)^2$

(**) Apesar de o examinando ter efectuado a redução ao mesmo denominador e indicado a soma dos numeradores, esta passagem é completamente inútil (é como se não existisse), na medida em que, por falta da substituição de $2\,i^2$ por $-\,2,$ bem como pela falta de redução dos termos semelhantes, tudo se passa como se o examinando tivesse passado directamente da segunda expressão para a última.

Exemplo 3

$$2\,i\,+\,\frac{w^2}{i}\;=\;2\,i\,+\,\frac{(4-3i)^2}{i}\;=\;2\,i\,+\,\frac{16-9\,i^2}{i}\;=\;2\,i\,+\,\frac{16+9}{i}\;=$$

$$=2\,i\,+\,\frac{25\,(-i)}{i\,(-i)}=2\,i\,+\,\frac{-25\,i}{-i^2}\;=\;2\,i\,+25\,i\;=\;27\,i$$

Cotação a atribuir (1.º processo): $1+2(0+2)\,+\,3(1+2^{(*)})+1=7$

(*) Atribuiu-se 2 dos 4 pontos previstos para esta etapa, pois:

- devido ao erro cometido no desenvolvimento do quadrado da diferença, o grau de dificuldade diminuiu um pouco, pelo que se considerou que a cotação máxima a atribuir a esta etapa deveria ser de 3 pontos, em vez de 4 (ver critério geral 4.4);
- o examinando comete um erro de contas ocasional (erro de sinal), que deve ser penalizado em 1 ponto (ver critério geral 4.2).

Exemplo 4

$$2\,i\,=2\;cis\frac{\pi}{2}\qquad w=4-3\,i\qquad \rho=\sqrt{4^2+(\,-\,3)^2}=5\qquad tg\;\theta=\,-\,\frac{3}{4}$$

Cotação a atribuir: $0^{(*)}$

(*) Apesar de correctos, os cálculos apresentados pelo examinando não conduzem à solução do exercício, pelo que esta resposta não pode ser considerada uma resolução incompleta. Observe-se que o examinando só poderia seguir um método baseado na representação trigonométrica, utilizando um valor aproximado para o argumento. Para isso, teria de recorrer à calculadora, processo que contraria a instrução de não utilização da mesma, dada no enunciado (ver critério geral 7).

1.2. 10

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

<u>1.º Processo:</u>

$w = 5\,cis\,\alpha$ .... 2 (1+1)

$\overline{w} = 5\,cis\,(-\,\alpha)$ .... 3 (1+2)

$i \times \overline{w} = 5\ cis\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ .... 5 (1+4)

Nota:
As subdivisões das cotações indicadas entre parêntesis correspondem: a primeira, à escrita do módulo; a segunda, à escrita do argumento.
Se o examinando determinar um valor aproximado de α, as cotações máximas a atribuir deverão ser, respectivamente, 1 (1+0), 2 (1+1) e 4 (1+3) pontos.

<u>2.º Processo:</u>

$\overline{w} = 4 + 3\,i$ 1

$i \times \overline{w} = -3 + 4\,i$ 2

$i \times \overline{w} = 5\ cis\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ **(ver notas 1 e 2)** .... 7 (1+6)

Notas:

1. 1+6 significa: 1 ponto pela escrita do módulo, 6 pontos pela escrita do argumento. Estes 6 pontos podem ser subdivididos em 2+4: 2 pontos pela escrita de $-\,\alpha$ e 4 pontos pela escrita de $\frac{\pi}{2}$.

2. Se o examinando determinar um valor aproximado de um argumento de $i \times \overline{w}$, a cotação máxima a atribuir a esta etapa deverá ser de 2 (1+1) pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$arg\,(w) = \alpha$

$w = \rho \; cis\,\alpha \qquad \overline{w} = \rho \; cis\,(-\,\alpha)$

$i \times \overline{w} = \rho \; cis\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

Cotação a atribuir (1.º processo): $1(0+1) + 3(1+2) + 5(1+4) = 9$

Exemplo 2

$|\,w\,| = \sqrt{16+9} = 5$

$tg\left(-\,\frac{3}{4}\right) \approx -\,0{,}64$

$i \times 5\,cis\,(-\,0{,}64) = 5\,cis\,(-\,0{,}64)$

Cotação a atribuir (1.º processo): $1(1+0) + 1(1+0^{(*)}) + 1(1+0)^{(**)} = 3$

(*) O valor $-\,0{,}64$ é um valor aproximado às centésimas de um argumento de w, e não de $\overline{w}$

(**) Não deve ser descontado 1 ponto, na cotação total a atribuir à resposta, pois, apesar de o examinando escrever a expressão inequivocamente incorrecta $tg\left(-\,\frac{3}{4}\right) \approx -\,0{,}64$, as subdivisões da cotação que dizem respeito à escrita dos argumentos foram todas cotadas com 0 (zero) pontos - ver critério geral 6.

Exemplo 3

$w = 4 - 3\,i \qquad \overline{w} = 4 + 3\,i$

$i \times \overline{w} = -\,3 + 4\,i \qquad |\,i \times \overline{w}\,| = \sqrt{9+16} = 5$

$tg\;\theta = -\,\frac{4}{3} \qquad \theta \approx -\,0{,}927$

$i \times \overline{w} = 5\;cis\,(-\,0{,}927)$

Cotação a atribuir (2.º processo): $1 + 2 + 1\,(1+0^{(*)}) = 4$

(*) O valor $-\,0{,}927$ não é um valor aproximado às milésimas de um argumento de $i \times \overline{w}$, dado que a imagem geométrica de $i \times \overline{w}$ pertence ao segundo quadrante.

2.1.1. 14

Calcular $f'(x)$ **(ver nota)** 5

Calcular $f'(1)$ 3

Calcular $f(1)$ 2

Escrever a equação reduzida da recta pedida 4

Determinar a ordenada na origem 3

Escrever a equação 1

ou

Escrever a equação $y - f(1) = f'(1)\,(x-1)$ 2

Escrever a equação reduzida.. 2

Nota:
Se existir evidência de que o examinando pretende determinar a expressão da derivada da função, a cotação mínima a atribuir a esta etapa é 1 ponto.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$f'(x) = \frac{(e^x - 1)' \times x - x'(e^x - 1)}{x^2} = \frac{e^x \times x - e^x - 1}{x^2}$$

$f'(1) = -1$ $\qquad$ $f(1) = e - 1$

$y = -x + b$ $\qquad$ $e - 1 = -1 + b \Leftrightarrow b = e$

$y = -x + e$

Cotação a atribuir: $3^{(*)} + 3 + 2 + 4\,(3+1) = 12$

(*) Penalizou-se em 2 pontos o erro cometido no cálculo da derivada (não se considerou ser um erro de contas ocasional).

Exemplo 2

$$f'(x) = \frac{e^x \times x - 1 \times (e^x - 1)}{x^2} = \frac{x\,e^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{e^x(x+1)}{x^2}$$

$$f'(1) = 2\,e = m$$

$f(1) = e - 1 \approx 2{,}7 - 1 = 1{,}7 \approx 2$ Ponto $(1, 2)$

$$y - 2 = 2\,e\,(x - 1)$$

Cotação a atribuir: $2^{(*)} + 3 + 1 + 2\,(2 + 0) = 8$

(*) Penalizou-se em 3 pontos o erro cometido na simplificação da expressão da derivada (considerou-se um erro grave) - ver critério geral 4.2.

Exemplo 3

$$f'(x) = e^x \times x - 1 \times (e^x - 1) = x\,e^x - e^x - 1$$

$$f'(1) = -1$$

Cotação a atribuir: $1^{(*)} + 3 + 0 + 0\,(0 + 0) = 4$

(*) Atribuiu-se 1 ponto - ver a nota na página anterior que diz: *se existir evidência de que o examinando pretende determinar a expressão da derivada da função, a cotação mínima a atribuir a esta etapa é 1 ponto*.

Exemplo 4

$$f'(x) = \frac{(e^x - 1)' \times x - x'(e^x - 1)}{x^2} = \frac{e^x \times x - (e^x - 1)}{x^2}$$

$f'(1) = 1$ $m = 1 \Rightarrow y = x + b$

$1 = 1 + b \Leftrightarrow b = 0$ $y = x$

Cotação a atribuir: $5 + 3 + 0 + 1\,(0^{(*)} + 1^{(**)}) = 9$

(*) O cálculo de b está conceptualmente incorrecto, dado que o examinando substitui y por 1, que não é a ordenada do ponto de tangência.

(**) Ver critério geral 4.3

2.1.2. .... **14**

Estudar a função quanto à existência de assimptotas verticais do seu gráfico.....4

$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ **(ver nota 1)** 2

Concluir que a recta de equação $x = 0$ não é assimptota vertical do gráfico da função 1

Referir que, pelo facto de a função ser contínua em $\mathbb{R} \backslash \{0\}$, o seu gráfico não admite outras assimptotas verticais 1

Estudar a função quanto à existência de assimptotas horizontais do seu gráfico, quando $x \to +\infty$ 5

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ **(ver nota 2)** 4

Concluir que o gráfico da função não admite assimptota horizontal, quando $x \to +\infty$ 1

ou

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ **(ver nota 3)** 4

Concluir que o gráfico da função não admite assimptota, quando $x \to +\infty$ 1

Estudar a função quanto à existência de assimptotas horizontais do seu gráfico, quando $x \to -\infty$ 5

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ **(ver nota 4)** 4

Concluir que o gráfico da função admite uma assimptota horizontal, de equação $y = 0$, quando $x \to -\infty$ 1

ou

$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ **(ver nota 4)** 2

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ **(ver nota 4)** 2

Concluir que o gráfico da função admite uma assimptota horizontal, de equação $y = 0$, quando $x \to -\infty$ 1

Notas:

1. O examinando poderá calcular separadamente os dois limites laterais no ponto 0. Se o fizer, os 2 pontos relativos a esta etapa deverão ser subdivididos da seguinte forma:

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$ 1

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$ 1

2. No cálculo deste limite, exige-se que o examinando explicite o processo utilizado para levantar a indeterminação. Por exemplo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

ou

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{e^x}{x} \left(1 - \frac{1}{e^x} \right) \right] = +\infty$$

Se não o fizer, a cotação máxima a atribuir a esta etapa é de 3 pontos.

3. No cálculo deste limite, exige-se que o examinando explicite o processo utilizado para levantar a indeterminação. Por exemplo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$$

ou

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{e^x}{x^2} \left(1 - \frac{1}{e^x} \right) \right] = +\infty$$

Se não o fizer, a cotação máxima a atribuir a esta etapa é de 3 pontos.

4. No cálculo deste limite, não se exige que o examinando apresente cálculos intermédios.

Se o examinando escrever que está perante uma indeterminação, deverá ser penalizado em, pelo menos, 50% da cotação atribuída à etapa.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ Logo, o gráfico não tem assimptota vertical.

Assimptotas não verticais: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{e^x-1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{e^x-1}{x^2} =$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^x}{x^2} + \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-1}{x^2} = +\infty + \frac{-1}{+\infty} = +\infty$$

O gráfico não apresenta assimptotas não verticais.

Cotação a atribuir: $3(2+1+0) + 1(0+1^{(*)}) + 1\,(0+0+1^{(*)}) = 5$
(*) O examinando conclui correctamente a não existência de assimptotas não verticais, tendo em conta o resultado obtido.

Exemplo 2

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ Tem uma assimptota vertical: $x = 1$

Assimptotas não verticais: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x-1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x^2} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} + \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x^2} = +\infty + \frac{-1}{+\infty} = +\infty - 0 = +\infty$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x-1}{x^2} = \frac{0-1}{+\infty} = 0$ Assimptota horizontal: $y = 0$

Cotação a atribuir: $2(2+0+0) + 4(4+0) + 2\,(2+0+0^{(*)}) = 8$
(*) Apesar de o examinando ter concluído a existência de assimptota horizontal ($y = 0$), quando $x \to -\infty$, não tinha todos os elementos que permitiam obter essa conclusão, dado que apenas calculou o valor de m.

Exemplo 3

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Logo, o gráfico não tem assimptota vertical; nenhum dos limites laterais é infinito.

Assimptotas horizontais:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} - \lim_{x \to +\infty} 1 = +\infty - 1 = +\infty$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 0$ Só tem assimptota horizontal $(y = 0)$ quando $x \to -\infty$

Cotação a atribuir: $3(2 + 1 + 0) + 3(2^{(*)} + 1^{(**)}) + 5\,(4 + 1) = 11$
(*) O examinando comete um erro grave, pelo que é penalizado em metade da cotação da etapa - ver critério geral 4.2.
(**) Embora não esteja explícito que o gráfico de f não tem assimptota horizontal, quando $x \to +\infty$, considera-se que essa conclusão está implícita na frase «*Só tem assimptota horizontal quando* $x \to -\infty$», pelo que tal conclusão deve receber a cotação indicada (1 ponto) - ver critério geral 4.5.

Exemplo 4

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \; \left(\frac{0}{0}\right) \qquad \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Logo, o gráfico não tem assimptota vertical porque o limite é finito.

Assimptotas horizontais: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x} \; \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = +\infty$

Não existe assimptota horizontal quando $x \to +\infty$ porque o limite é infinito.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x - 1}{x} \; \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 0$

Existe uma assimptota horizontal $(y = 0)$ quando $x \to -\infty$

Cotação a atribuir: $3(2 + 1 + 0) + 4(3^{(*)} + 1) + 3\,(2^{(**)} + 1) = 10$
(*) Ver nota 2
(**) Ver nota 4

2.2. .... **14**

Explicação do método utilizado para resolver graficamente a inequação **(ver nota 1)**.. 4

$a \approx 0{,}15$ **(ver nota 2)** 5

$b \approx 2{,}27$ **(ver nota 3)** 5

Notas:

1. Os 4 pontos relativos à explicação do método utilizado devem ser atribuídos de acordo com o seguinte critério:

Apresentação do gráfico da função f e do gráfico da função definida por $3 + \ln x$, bem como dos pontos de intersecção dos dois gráficos e respectivas abcissas (ou apresentação do gráfico de $f(x) - 3 - \ln x$ e respectivos zeros) 4

Apresentação dos gráficos com ausência de alguns elementos (por exemplo, ausência das abcissas dos pontos de intersecção) e/ou com algumas incorrecções (por exemplo, o gráfico da função definida por $3 + \ln x$ não respeita o seu domínio). Não se exige que o examinando coloque uma bola aberta no ponto onde o gráfico de f intersecta o eixo Oy .... 1 a 3

Ausência de explicação, simples referências do tipo «*Vi na calculadora*» ou utilização de processo não gráfico, como, por exemplo, uma tabela.. 0

2. A escrita do valor aproximado pedido (para a) deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

<u>1.º Caso</u> (apresentação do resultado arredondado às centésimas, de acordo com o enunciado):

Resposta $0{,}15$ 5

Resposta $0{,}14$ 4

Resposta $0{,}13$ ou $0{,}16$ 3

Resposta $0{,}12$ ou $0{,}17$ 2

Resposta $0{,}11$ ou $0{,}18$ 1

Outros resultados 0

2.º Caso (apresentação do resultado com arredondamento superior às centésimas):

Valor no intervalo $[0{,}141 \; ; \; 0{,}151]$ 3

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[0{,}131 \; ; \; 0{,}161]$ 2

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[0{,}121 \; ; \; 0{,}171]$ 1

Outros resultados 0

3.º Caso (apresentação do resultado com arredondamento às décimas):

Valor igual a $0{,}1$ ou a $0{,}2$ 1

Outros resultados 0

4.º Caso (apresentação do resultado com arredondamento às unidades):

Qualquer resultado 0

3. A escrita do valor aproximado pedido (para b) deve ser cotada de acordo com o seguinte critério:

1.º Caso (apresentação do resultado arredondado às centésimas, de acordo com o enunciado):

Resposta $2{,}27$ 5

Resposta $2{,}26$ 4

Resposta $2{,}25$ ou $2{,}28$ 3

Resposta $2{,}24$ ou $2{,}29$ 2

Resposta $2{,}23$ ou $2{,}30$ 1

Outros resultados 0

2.º Caso (apresentação do resultado com arredondamento superior às centésimas):

Valor no intervalo $[2{,}263 \; ; \; 2{,}273]$ 3

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[2{,}253 \; ; \; 2{,}283]$ 2

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[2{,}243 \; ; \; 2{,}293]$ 1

Outros resultados 0

3.º Caso (apresentação do resultado com arredondamento às décimas):

Valor igual a $2{,}2$ ou a $2{,}3$ 1

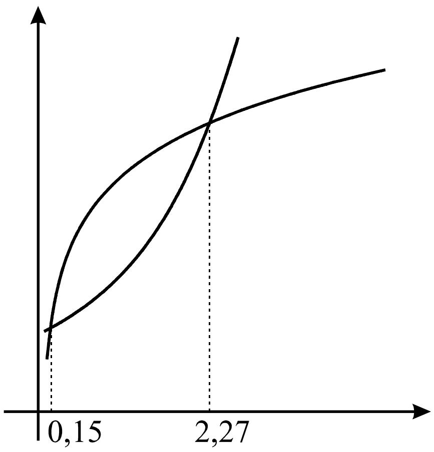
Outros resultados 0

4.º Caso (apresentação do resultado com arredondamento às unidades):

Qualquer resultado 0

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1



$a \approx 0{,}15$

$b \approx 2{,}27$

Cotação a atribuir: $4 + 5 + 5 = 14$

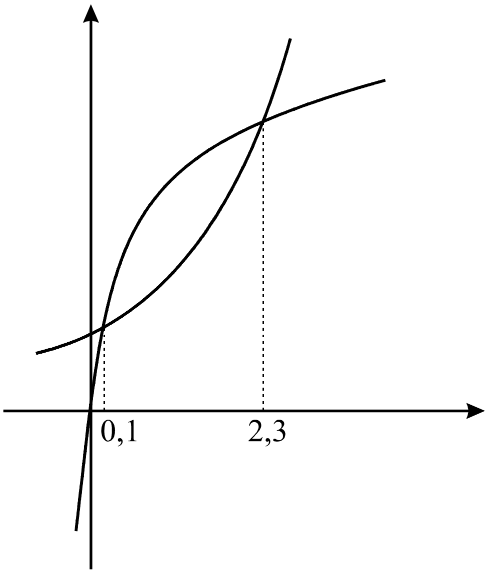
Exemplo 2

Fui à Table e vi que $f(x) \geq 3 + \ln x$ para $x \in [0{,}15\,,\ 2{,}27]$

Cotação a atribuir: $0^{(*)} + 0^{(*)} + 0^{(*)} = 0$

(*) O examinando desrespeita a indicação, expressa no enunciado, de que se pretendia uma resolução gráfica da inequação (ver critério geral 7).

Exemplo 3



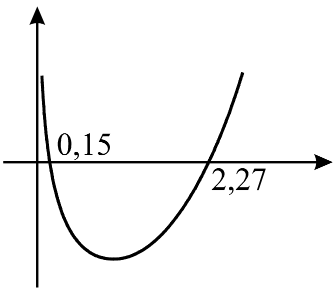
$a \approx 0{,}1 \qquad b \approx 2{,}3$

Cotação a atribuir: $2^{(*)} + 1 + 1 = 4$

(*) O gráfico apresenta as abcissas dos pontos de intersecção, mas não respeita o domínio da função definida por $3 + \ln x$ (uma parte do gráfico desta função está no terceiro quadrante).

Exemplo 4

$$\frac{e^x - 1}{x} \leq 3 + \ln x \;\Leftrightarrow\; \frac{e^x - 1}{x} - 3 - \ln x \leq 0$$

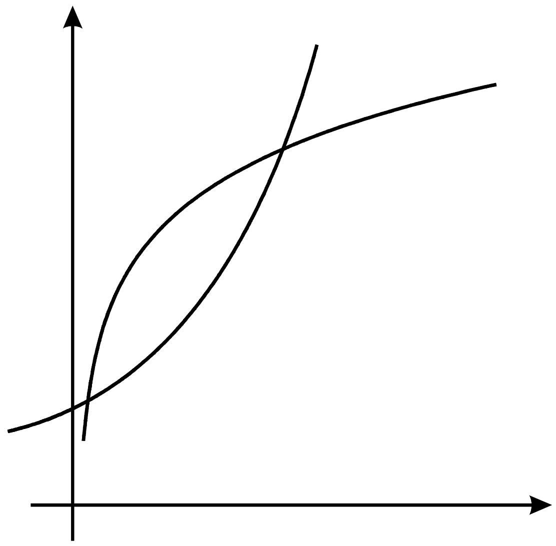


$x \in [0{,}15\,,\ 2{,}27]$

Cotação a atribuir: $4 + 5 + 5 + (-1)^{(*)} = 13$

(*) O examinando comete um erro formal de escrita (o conjunto solução não é o intervalo indicado, já que $0{,}15$ e $2{,}27$ não são os extremos do intervalo, mas sim, valores aproximados desses extremos) - ver critério geral 6.

Exemplo 5



$a \approx 0{,}15$

$b \approx 2{,}27$

Cotação a atribuir: $3^{(*)} + 5 + 5 = 13$
(*) O gráfico não apresenta as abcissas dos pontos de intersecção.

Exemplo 6

$a \approx 0{,}15$

$b \approx 2{,}27$

Cotação a atribuir: $0^{(*)}$
(*) Ver critério geral 2.

3.1. .... **14**

Equacionar o problema: $b(t) = p(t)$ 3

$b(t) = p(t) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-0,1\,t}\, sen\,(\pi\, t) = -1{,}37\; e^{-0,1\,t}\, sen\,(\pi\; t)$........................1

$\Leftrightarrow 2{,}37\; e^{-0,1\,t}\, sen\,(\pi\; t) = 0$..1

$\Leftrightarrow sen\,(\pi\; t) = 0$.. 2

$\Leftrightarrow \pi\; t = k\,\pi,\; k \in \mathbb{N}_0$ **(ver nota 1)**...2

$\Leftrightarrow\; t = k\,,\; k \in \mathbb{N}_0$ 1

$t = k\,,\; k \in \mathbb{N}_0 \;\wedge\; t \in [0, 5] \;\Leftrightarrow\; t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 3

Conclusão (Durante os primeiros cinco segundos, as duas bolas estiveram seis vezes à mesma distância da base do recipiente.) 1

Notas:

1. Se o examinando indicar $k \in \mathbb{Z}$, não deve ser penalizado.

2. Se o examinando se limitar a verificar que $b(0) = p(0)$, ..., $b(5) = p(5)$, não prova que as únicas soluções do problema são $0, 1, 2, 3, 4$ e 5. Esta resposta deverá ser cotada em 7 pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$b(t) = p(t)$

$10 + e^{-0,1\,t}\, sen\,(\pi\, t) = 10 - 1{,}37\; e^{-0,1\,t}\, sen\,(\pi\; t)$

$e^{-0,1\,t}\, sen\,(\pi\, t) = -1{,}37\; e^{-0,1\,t}\, sen\,(\pi\; t)$

$-1{,}37\; e^{-0,1\,t}\, sen\,(\pi\; t) = 0$

Cotação a atribuir: $3 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 4$

Exemplo 2

Estiveram por 6 vezes a igual distância em $t = 0,\ t = 1,\ t = 2,\ t = 3,\ t = 4,\ t = 5,$

porque nestes momentos o seno é sempre igual a zero, logo estiveram a 10 cm da base do recipiente.

Cotação a atribuir: 7 (ver a nota 2, que diz: «*Se o examinando se limitar a verificar que* $b(0) = p(0),\ .....,\ b(5) = p(5)$, *não prova que as únicas soluções do problema são* $0, 1, 2, 3, 4$ *e* 5. *Esta resposta deverá ser cotada em 7 pontos.*»)

Exemplo 3

$$b(t) = p(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 + e^{-0{,}1\,t}\ sen\,(\pi\, t) = 10 - 1{,}37\ e^{-0{,}1\,t}\ sen\,(\pi\ t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-0{,}1\,t}\ sen\,(\pi\, t) = -1{,}37\ e^{-0{,}1\,t}\ sen\,(\pi\ t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{\,t}\ sen\,(\pi\, t) = -1{,}37\ e^{\,t}\ sen\,(\pi\ t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow sen\,(\pi\, t)\ \ (e^{\,t} + 1{,}37\ \ e^{\,t}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow sen\,(\pi\, t) = 0\ \vee\ \underbrace{e^{\,t} + 1{,}37\ \ e^{\,t} = 0}_{\text{equação impossível}}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 0\ \vee\ \ t = 1\ \vee\ t = 2\ \ \vee\ \ t = 3\ \ \vee\ \ t = 4\ \ \vee\ \ t = 5$$

Estiveram à mesma altura seis vezes.

Cotação a atribuir: $3 + 1 + 0 + 2 + 2^{(*)} + 1^{(*)} + 3 + 1 = 13$

(*) Ver critério geral 4.5

3.2. 14

Cálculo de $b\left(\frac{1}{2}\right)$ 2

Cálculo de $p\left(\frac{1}{2}\right)$ 2

Cálculo do cateto desconhecido $\left(b\left(\frac{1}{2}\right) - p\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ **(ver nota 1)** 2

Aplicação do Teorema de Pitágoras e conclusão **(ver nota 1)** 8

Notas:

1. Deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos às duas últimas etapas, no caso em que o examinando não tenha cumprido as duas primeiras. Em particular, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos às duas últimas etapas, no caso em que o examinando utilize valores resultantes de uma tentativa de resolver as equações $b(t) = 1/2$ e $p(t) = 1/2$.
   Obviamente, esta disposição não se aplica quando o examinando, ao tentar cumprir as duas primeiras etapas, comete erros de cálculo.

2. Se o examinando não apresentar o resultado final arredondado às décimas, ou se apresentar um arredondamento incorrecto, deverá ser penalizado em 1 ponto, na cotação total a atribuir à sua resposta.

3. Se o examinando não respeitar a indicação, expressa no enunciado, de conservação de um mínimo de duas casas decimais, nos cálculos intermédios, deverá ser penalizado em 1 ponto, na cotação total a atribuir à sua resposta.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$b\left(\frac{1}{2}\right) = 10 + e^{-0{,}1\times 0{,}5}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 10 + 0{,}9 = 10{,}9$$

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = 10 - 1{,}37\,e^{-0{,}1\times 0{,}5}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 10 - 1{,}37 \times 0{,}9 \approx 10 - 1{,}2 = 8{,}8$$

$10{,}9 - 8{,}8 = 2{,}1$ $\qquad$ $2{,}1^2 + 2{,}5^2 = d^2$ $\qquad$ $4{,}4 + 6{,}25 = d^2$

$10{,}65 = d^2$ $\qquad$ $d \approx 3{,}3$

Cotação a atribuir: $2 + 2 + 2 + 8 + (-1)^{(*)} = 13$

(*) O examinando não respeita a indicação, expressa no enunciado, de conservação de um mínimo de duas casas decimais, nos cálculos intermédios, pelo que deverá ser penalizado em 1 ponto, na cotação total a atribuir à sua resposta (ver nota 3).

Exemplo 2

$$10 + e^{-0,1\,t}\,\text{sen}\,(\pi\,t) = 0,5 \;\Leftrightarrow\; 20 = \;-\,e^{-0,1\,t}\,\text{sen}\,(\pi\,t) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; ln\,20 \;=\; -\,0,1\,t\;\text{sen}\,(\pi\,t) \;\;\Leftrightarrow\; t = \frac{ln\,20}{0,1} \Leftrightarrow t = 29,96$$

$$10 - 1,37\,e^{-0,1\,t}\,\text{sen}\,(\pi\,t) = 0,5 \;\;\Leftrightarrow\; \frac{20}{1,37} \;= e^{-0,1\,t}\,\text{sen}\,(\pi\,t) \;\;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; ln\,14,6 \;=\; 0,1\,t\;\text{sen}\,(\pi\,t) \;\Leftrightarrow\; t = \frac{ln\,14,6}{0,1} \;\;\Leftrightarrow\; t = 26,8$$

$29,96 - 26,8 = 3,16$ $\qquad$ $3,16^2 + 2,5^2 = d^2 \;\;\Leftrightarrow\;\; 16,24 = d^2 \;\Leftrightarrow\; d = 4$

Cotação a atribuir: $0 + 0 + 0^{(*)} + 0^{(*)} = 0$
(*) Ver nota 1

Exemplo 3

$$b(0,5) = 10 + e^{-0,1\,\times 0,5}\,\text{sen}\,(\pi \times 0,5) \approx 10,45$$

$$p(0,5) = 10 - 1,37\,e^{-0,1\,\times 0,5}\,\text{sen}\,(\pi \times 0,5) \approx 8,76$$

$p(0) = b(0) = 10$ $\qquad$ $10,45 - 10 = 0,45$ $\qquad$ $10 - 8,76 = 1,24$

$1,24 + 0,45 = 1,69$ $\qquad$ $1,69^2 + 2,5^2 = d^2$ $\qquad$ $d \approx 3,0$

Cotação a atribuir: $1 + 1 + 2^{(*)} + 8^{(*)} = 12$
(*) O examinando utiliza um processo de cálculo do cateto desconhecido que, embora não seja o mais esperado ($b(0,5) - p(0,5)$), está correcto. É, portanto, devido aos erros de cálculo cometidos nas etapas anteriores que o valor obtido ($1,69$) está incorrecto. O Teorema de Pitágoras está também correctamente aplicado e o arredondamento final está igualmente correcto. Portanto, de acordo com o critério geral 4.3, deve ser atribuída a totalidade da cotação às duas últimas etapas.

Exemplo 4

$$b(0,5) = 10 + e^{-0,1\,\times 0,5}\,\text{sen}\,(\pi \times 0,5) = 10 + e^{-0,1\,\times 0,5} \;\times 0 = 10$$

$$p(0,5) = 10 - 1,37\,e^{-0,1\,\times 0,5}\,\text{sen}\,(\pi \times 0,5) = 10 - 1,37\,e^{-0,1\,\times 0,5} \;\times 0 = 10$$

Uma vez que as duas bolas estão a 10 cm de distância da base do recipiente, a distância entre os centros delas é de 2,5 cm.

Cotação a atribuir: $1 + 1 + 0 + 3^{(*)} = 5$
(*) Como a conclusão está correcta, em face dos valores obtidos para $b(0,5)$ e $p(0,5)$, entendeu-se que deveria ser atribuída alguma pontuação à última etapa. Por outro lado, devido ao erro cometido no cálculo de $b(0,5)$ e $p(0,5)$, o grau de dificuldade da última etapa diminuiu bastante, dado que, neste caso, não tem sentido aplicar o Teorema de Pitágoras. Entendeu-se, assim, que não deveriam ser atribuídos mais de 3 pontos a esta etapa (ver critério geral 4.4).

Exemplo 5

$b(0{,}5) = 10 + e^{-0{,}1\,\times 0{,}5}\,\text{sen}\,(\pi \times 0{,}5) \approx 10{,}95$

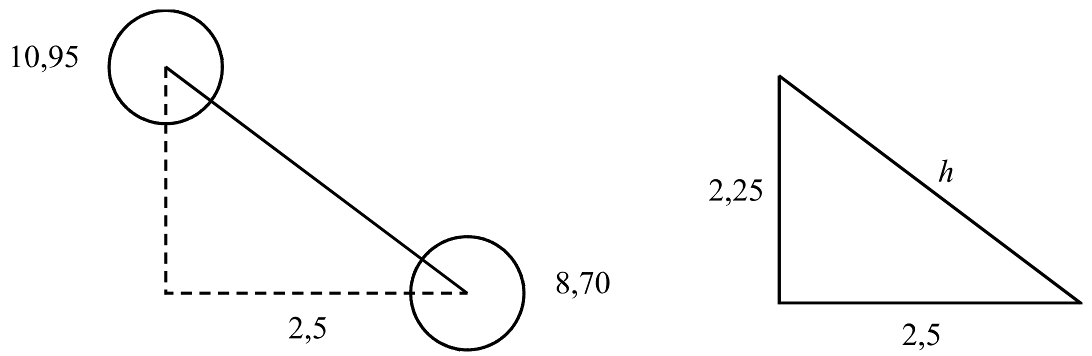
$p(0{,}5) = 10 - 1{,}37\,e^{-0{,}1\,\times 0{,}5}\,\text{sen}\,(\pi \times 0{,}5) \approx 8{,}70$

$b(0{,}5) - p(0{,}5) \approx 2{,}25$

A distância entre os centros das bolas é de 2,3 cm

Cotação a atribuir: $2 + 2 + 2 + 0 = 6$

Exemplo 6



$h^2 = 2{,}25^2 + 2{,}5^2$

$h^2 = 11{,}3125$

$h \approx 3{,}4$

A distância entre os centros das bolas é de 3,4 cm

Cotação a atribuir: $2^{(*)} + 2^{(*)} + 2 + 8 = 14$

(*) Ver critério geral 4.5.

4. .... **14**

Cálculo da primeira derivada de f 2

Cálculo da segunda derivada de f 4

Estudo do sinal da segunda derivada de f 7

Referência ao facto de $x^{\alpha-2}$ ser positivo, para qualquer x pertencente a $\mathbb{R}^+$ 1

Justificação de que $\alpha(\alpha-1)$ é negativo 5

Referência ao facto de α ser positivo 1
Referência ao facto de $\alpha-1$ ser negativo 4

ou

Estudo do sinal da função quadrática definida por $\alpha^2-\alpha$ e conclusão de que é negativa para $\alpha \in \,]0,1[$ 5

Conclusão de que $f''(x)$ é negativa, para qualquer x pertencente a $\mathbb{R}^+$ 1

Conclusão de que o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo 1

Nota:
Qualquer tentativa de resolução desta questão apoiada apenas em valores particulares de α deverá ser cotada com 0 (zero) pontos.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$f(x)=x^{\alpha} \qquad f'(x)=\alpha\, x^{\alpha-1} \qquad f''(x)=\underbrace{\alpha}_{+}\ \underbrace{(\alpha-1)}_{-}\ \underbrace{x^{\alpha-2}}_{+}<0$$

Logo, a concavidade está voltada para baixo.

Cotação a atribuir: $2+4+7\,(1+5\,(1+4\,)+1)+1=14$

Exemplo 2

$$f'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}$$
$$f''(x) = \alpha^2 - \alpha\, x^{\alpha-2}$$

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f''(x)$	$-$
$f(x)$	$\frown$

Cotação a atribuir: $2 + 2 + 0\ + 0^{(*)} = 4$
(*) O quadro está descontextualizado (o examinando, sabendo que se pretendia provar que a concavidade está voltada para baixo, faz um quadro no qual pretende evidenciar essa conclusão, mas que não resulta da expressão obtida para a segunda derivada) - ver critério geral 8.

Exemplo 3

$$\alpha = 0{,}5$$
$$f(x) = x^{0{,}5}$$
$$f'(x) = 0{,}5\, x^{-0{,}5}$$
$$f''(x) = \ -0{,}25\, x^{-1{,}5}$$

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f''(x)$	$-$
$f(x)$	$\frown$

Cotação a atribuir: $0^{(*)}$
(*) Ver a nota que refere «*Qualquer tentativa de resolução desta questão apoiada apenas em valores particulares de* α *deverá ser cotada com 0 (zero) pontos*».

Exemplo 4

$$\alpha = \frac{1}{n}$$
$$f(x) = x^{1/n}$$
$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

Portanto, a concavidade está voltada para baixo.

Cotação a atribuir: $0^{(*)}$
(*) Ver a nota que refere «*Qualquer tentativa de resolução desta questão apoiada apenas em valores particulares de* α *deverá ser cotada com 0 (zero) pontos*».

5.1. .... **10**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

<u>1.º Processo (sem utilização da fórmula da probabilidade condicionada):</u>

Neste caso, as cotações devem ser atribuídas de acordo com o seguinte critério:

Indicação do valor da probabilidade pedida $\left(\frac{1}{3}\right)$,
acompanhado de justificação completa **(ver nota)** 10

Indicação do valor da probabilidade pedida $\left(\frac{1}{3}\right)$,
acompanhado de justificação não totalmente completa e/ou com
algumas incorrecções .... 6 a 8

Indicação do valor da probabilidade pedida $\left(\frac{1}{3}\right)$,
acompanhado de justificação muito incompleta 5

Indicação do valor da probabilidade pedida $\left(\frac{1}{3}\right)$, sem
qualquer justificação (ver critério geral 2) 0

Nota:
Apresentam-se a seguir dois exemplos de justificações completas.

Exemplo 1: *Dado que o acontecimento* A *se realizou, sabemos que saiu face par, pelo que existem três casos possíveis (sair face 2, 4 ou 6), dos quais apenas um (sair face 2) é favorável à realização do acontecimento* B*.*

Exemplo 2: $A = \{2, 4, 6\}$ $B = \{1, 2, 3\}$ $A \cap B = \{2\}$

$$P(B|A) = \frac{\#(A \cap B)}{\#(A)} = \frac{1}{3}$$

<u>2.º Processo (com utilização da fórmula da probabilidade condicionada):</u>

$P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ 1

$P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$ 7

$P(A) = \dfrac{1}{2}$ 1

$P(B|A) = \dfrac{1}{3}$ **(ver nota 1)**.. 1

Notas:
1. No caso de o resultado obtido não pertencer ao intervalo $[0, 1]$, não deve ser atribuído o ponto relativo a esta etapa.

2. Se o examinando utilizar uma fórmula incorrecta (por exemplo $P(B|A) = \frac{P(A \cup B)}{P(A)}$, $P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)}$ ou $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$), deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos à sua resposta.

3. Se o examinando escrever $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3}$, não explicitando que $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ e que $P(A) = \frac{1}{2}$, deve ser atribuída a cotação de 8 pontos à sua resposta.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$A = \{2, 4, 6\}$ $B = \{1, 2, 3\}$ $P(B|A) = \frac{1}{3}$

Cotação a atribuir (1.º processo): $5^{(*)}$

(*) Indicação do valor da probabilidade pedida, acompanhado de justificação muito incompleta.

Exemplo 2

$A \cap B$: sair face par e sair número menor que 4 A: sair face par $P(B|A) = \frac{A \cap B}{A} = \frac{1}{3}$

Cotação a atribuir (1.º processo): $6^{(*)}$

(*) Indicação do valor da probabilidade pedida, acompanhado de justificação com uma incorrecção grave.

Exemplo 3

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Cotação a atribuir (2.º processo): $1 + 0 + 1 + 1 = 3$

Exemplo 4

$$P(B|A) = \frac{P(A \cup B)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{3}$$

Cotação a atribuir (2.º processo): $0^{(*)}$

(*) Ver nota 2.

Exemplo 5

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3}$$

Cotação a atribuir: (2.º processo) $8^{(*)}$

(*) Ver nota 3.

5.2. 10

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

<u>1.º Processo:</u>

Probabilidade pedida $= \dfrac{5^2}{6^3}$ **(ver notas 1, 2, 3 e 4)**..9

Probabilidade pedida $\approx 11{,}6\%$ **(ver nota 5)**.. 1

Notas:

1. O examinando pode começar por indicar o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis e só depois escrever a fracção.
No entanto, se não o fizer, isto é, se escrever directamente a fracção, não deverá ser penalizado.

2. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da fracção, com a respectiva cotação a atribuir.

$\dfrac{5^2}{6^3}$ (fracção correcta)... 9

Outras fracções com denominador 6^3 3

Outras situações 0

3. Se o examinando indicar correctamente o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverão ser atribuídos 8 pontos à sua resposta.

4. Se o examinando indicar correctamente apenas o número de casos possíveis $\left(6^3\right)$ ou apenas o número de casos favoráveis $\left(5^2\right)$, deverão ser atribuídos 2 pontos à sua resposta.

5. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos. No caso de o resultado obtido ser negativo ou superior a 100%, também não deve ser atribuído o ponto relativo a esta etapa.

2.º Processo:

Probabilidade pedida $= \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$ **(ver nota 1)**....................................9

Probabilidade pedida $\approx 11{,}6\%$ **(ver nota 2)**.. 1

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão que dá a probabilidade pedida, com a respectiva cotação a atribuir.

   $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$ (expressão correcta).. 9

   $\left(\frac{5}{6}\right)^3$ ou $\left(\frac{1}{6}\right)^3$ ou $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$ ou

   ${}^3C_1 \times \left(\frac{1}{6}\right)^1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2$... 3

   Outras situações 0

2. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos. No caso de o resultado obtido ser negativo ou superior a 100%, também não deve ser atribuído o ponto relativo a esta etapa.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

$$p = \frac{1}{{}^6A'_3} = \frac{1}{216} \approx 0{,}005 = 0{,}5\%$$

Cotação a atribuir (1.º processo): $3 + 1 = 4$

Exemplo 2

$$p = {}^3C_1 \times \left(\frac{1}{6}\right)^1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{25}{36} \approx 34{,}7\%$$

Cotação a atribuir (2.º processo): $3 + 1 = 4$

6. .... **12**

A composição deve contemplar os seguintes pontos:

1. Referência à Regra de Laplace.
   1.1. Referir a equiprobabilidade dos casos possíveis.
   1.2. Referir que a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis.

2. Explicação do valor $^{12}C_3$ (número de casos possíveis) - o examinando deverá referir que $^{12}C_3$ é o número de maneiras de retirar três bolas, de entre doze.

3. Explicação da contagem do número de casos favoráveis:
   3.1. Referir que existem duas hipóteses em alternativa: ou se retiram duas bolas com o número 1 e uma bola com o número 3, ou se retiram duas bolas com o número 2 e uma bola com o número 1.
   3.2. Explicação do valor $^{3}C_2$ - o examinando deverá referir que $^{3}C_2$ é o número de maneiras de retirar duas bolas, de entre as três que têm o número 1.
   3.3. Explicação do valor 4 - o examinando deverá referir que 4 é o número de maneiras de retirar uma bola, de entre as quatro que têm o número 3.
   3.4. Explicação do valor $^{5}C_2$ - o examinando deverá referir que $^{5}C_2$ é o número de maneiras de retirar duas bolas, de entre as cinco que têm o número 2.
   3.5. Explicação do valor 3 - o examinando deverá referir que 3 é o número de maneiras de retirar uma bola, de entre as três que têm o número 1.

Na tabela seguinte indica-se como esta questão deve ser cotada:

Forma **Conteúdo**	Nível 1 $(*)$	Nível 2 $(**)$	Nível 3 $(***)$
A composição contempla os oito pontos.	12	11	10
A composição contempla sete pontos.	10	9	8
A composição contempla seis pontos.	8	7	6
A composição contempla cinco pontos.	6	5	5
A composição contempla quatro pontos.	5	4	4
A composição contempla três pontos.	4	3	3
A composição contempla dois pontos.	3	2	2
A composição contempla um ponto.	2	1	1

$(*)$ **Nível 1** - Redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

$(**)$ **Nível 2** - Redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecte a inteligibilidade.

$(***)$ **Nível 3** - Redacção confusa, sem estruturação aparente, presença de erros graves, com perturbação frequente da inteligibilidade.

Exemplos de possíveis respostas dos examinandos

Exemplo 1

O número de casos possíveis é o número de maneiras de escolher três bolas de um total de doze, pelo que o número de casos possíveis é $^{12}C_3$.

Para que a soma dos números saídos seja 5*, ou se retiram duas bolas com o número* 1 *e uma bola com o número* 3*, ou se retiram duas bolas com o número* 2 *e uma bola com o número* 1.

No primeiro caso, temos de escolher duas bolas com o número 1*, de entre três, e uma bola com o número* 3*, de entre quatro, pelo que existem* $^{3}C_2 \times 4$ *maneiras diferentes de o fazer.*

No segundo caso, temos de escolher duas bolas com o número 2*, de entre cinco, e uma bola com o número* 1*, de entre três, pelo que existem* $^{5}C_2 \times 3$ *maneiras diferentes de o fazer.*

O número de casos favoráveis é, então, $^{3}C_2 \times 4 + {}^{5}C_2 \times 3$.

Uma vez que todos os casos possíveis são equiprováveis, a probabilidade pedida é, de acordo com a Regra de Laplace, $\frac{^{3}C_2\times4+{}^{5}C_2\times3}{^{12}C_3}$.

Cotação a atribuir: $12^{(*)}$

(*) A composição contempla os oito pontos, numa redacção clara, bem estruturada e sem erros (de sintaxe, de pontuação e de ortografia).

Exemplo 2

Casos possíveis serão todas as hipóteses que existem tendo em conta as condições dadas, ou seja, existindo 12 bolas, elas terão de ser tiradas 3 a 3. É uma combinação pois não interessa a ordem.

Casos favoráveis - podemos tirar duas bolas de 1 e dps uma bola de 3 (existe por isso a multiplicação por 4), dps podemos tirar duas bolas de 2 e juntar uma de 1 que dará 5, existem três bolas de 1, daí a multiplicação por 3.

Regra de Laplace é apenas que a probabilidade de um acontecimento é o número de casos favoráveis sobre (dividir) o nº de casos possíveis.

Por isso, $\frac{^{3}C_2\times4+{}^{5}C_2\times3}{^{12}C_3}$ *é a resposta ao problema.*

Cotação a atribuir: $4^{(*)}$

(*) A composição contempla quatro pontos (os pontos 1.2, 2, 3.1 e 3.5), numa redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecta a inteligibilidade.

Exemplo 3

Casos possíveis são todos os acontecimentos que se podem verificar. Logo são conjuntos de 3 bolas feitos a partir das 12 bolas tendo em conta que a ordem de saída não conta é por isso $^{12}C_3$.

Os casos favoráveis são conjuntos de duas bolas 2 + uma bola 1 ou conjuntos de duas bolas 1 + uma bola 3. É assim = às combinações de $^{3}C_2 \times 4 + {}^{5}C_2 \times 3$.

Usa-se a Regra de Laplace $= \frac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}}$.

Cotação a atribuir: $3^{(*)}$

(*) A composição contempla três pontos (os pontos 1.2, 2 e 3.1), numa redacção satisfatória, em termos de clareza, razoavelmente estruturada, com alguns erros cuja gravidade não afecta a inteligibilidade.

Adenda nº 1 aos critérios de classificação do Exame de Matemática - código 435 - 2ª Fase - 2004

1. Esclarecimento de ordem geral

Em cada questão, a cotação está fraccionada, sendo atribuída, a cada uma das etapas (ou sub-etapas) que o examinando deve percorrer, uma certa cotação máxima.
A cotação a atribuir a cada etapa (ou sub-etapa) deve ser dada de acordo com as indicações do critério geral 4.2. Isto significa que não se pode fraccionar ainda mais a cotação.
Exemplificando: se, numa etapa cotada com 5 pontos, o examinando cometer um erro grave (que revele desconhecimento de conceitos, regras ou procedimentos) não podem ser atribuídos mais de 2 pontos a essa etapa.

2. Esclarecimentos específicos

Questão 1.1.

1. Se o examinando passar directamente de $(4-3i)^2$ para $7-24i$, sem apresentação de cálculos intermédios, deverá ter 0 (zero) pontos nessa etapa, bem como em todas as subsequentes, que dela dependam. O motivo para este procedimento baseia-se na instrução geral que é apresentada no enunciado do grupo II da prova (...apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar...), bem como nos critérios gerais 7 e 8 dos critérios de classificação. De facto, ou o examinando fez o referido cálculo na calculadora, o que está vedado pelo enunciado, ou violou a citada instrução geral. Quer no primeiro caso (por aplicação do critério geral 7), quer no segundo (por aplicação do critério geral 8), deverá ter 0 (zero) pontos na referida etapa, bem como em todas as subsequentes, que dela dependam.
Consideramos que situações do tipo de «*quadrado de um número imaginário (não puro)*» ou de «*produto de dois imaginários (não puros)*» são suficientemente complexas para não se admitir que o examinando escreva directamente o resultado. Não se pode considerar que se trata de uma situação em que se possa aplicar o critério geral 4.5. Apenas se podem considerar abrangidas por este critério as situações onde o cálculo mental é imediato para todos os alunos.
Não proceder desta forma seria abrir um perigoso precedente: até onde se iria admitir que o examinando não apresentasse os cálculos que, por imposição da instrução geral relativa ao grupo II, está obrigado a apresentar?

2. Se o examinando apresentar o resultado final na forma $\dfrac{a+b\,i}{1}$ deve ser penalizado em 1 ponto, dado que não apresenta o resultado final na forma pedida.

3. Apresentam-se a seguir possíveis erros do examinando no desenvolvimento do quadrado de $4-3i$, com a respectiva cotação a atribuir:

$(4-3i)^2 = 16-24i-9i^2$ .... 1 ponto (dos 2 previstos para a etapa)

$(4-3i)^2 = 16-24i+3i^2$ .... 1 ponto (dos 2 previstos para a etapa)

$(4-3i)^2 = 8-24i+6i^2$ .... 0 pontos (dos 2 previstos para a etapa)

Questão 1.2.

1. Na terceira etapa do 2º processo previsto nos critérios de classificação, os 6 pontos relativos à escrita do argumento só devem ser atribuídos no caso em que essa mesma escrita seja acompanhada por alguma justificação (que poderá assumir a forma de um esquema ou de um desenho).

2. Ainda com respeito à terceira etapa do 2º processo previsto nos critérios de classificação, na nota 1, os 6 pontos relativos à escrita do argumento aparecem subdivididos em 2 + 4. Os 2 primeiros pontos devem ser atribuídos se o examinado evidenciar o conhecimento de que o argumento do conjugado de um complexo é simétrico do argumento desse complexo. Os 4 pontos devem ser atribuídos se o examinado evidenciar o conhecimento de que, ao multiplicar um complexo por i, o argumento é adicionado de $\pi/2$.

3. A resposta $w = 5\, cis\, \alpha$, $i\, w = 5\, cis \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ deve ser cotada, de acordo com o 1º processo, em 2+0+5=7 pontos.

4. O examinando pode escrever 90 (graus), em vez de $\pi/2$ (radianos).

5. Se o examinando resolver o exercício geometricamente, utilizando uma simetria e uma rotação, deve ser cotado por analogia com o primeiro processo (a simetria bem feita é cotada com 3 pontos e a rotação bem feita é cotada com 5 pontos).

Questão 2.1.1.

1. Se o examinando calcular $f'(1)$ pela definição de derivada, as duas primeiras etapas previstas nos critérios fundem-se numa só, que fica a valer 8 pontos (5+3). A cotação a atribuir a esta nova etapa (fusão das duas) deve ser dada de acordo com os critérios gerais 4.1 e 4.2.

2. Uma situação idêntica à do exemplo 4 dos critérios, mas onde o examinando acrescente $f(1) = 1$, deve ser cotada com
$5 + 3 + 0 + 4\,(3 + 1) = 12$ pontos.
No exemplo 4 dos critérios, não existe qualquer evidência de que o valor 1, que o examinando utiliza no cálculo da ordenada na origem, seja $f(1)$ mal calculado. De facto, não só o examinando não manifesta qualquer intenção de calcular $f(1)$, como o valor 1 é o valor obtido pelo examinando para $f'(1)$.

3. Qualquer valor para $f'(1)$ que não resulte de trabalho anterior (cálculo da derivada, pelas regras de derivação ou por definição) deve ser cotado com 0 pontos, bem como toda as etapas subsequentes que dependam deste valor (critério geral 8).

Questão 2.1.2.

1. É atribuído 1 ponto à conclusão de que o gráfico de f não admite assimptota horizontal, quando x tende para $+\infty$. Tal deve ser entendido desta forma: esse ponto deve ser atribuído sse o examinando evidenciar o conhecimento de que o gráfico da função não tem assimptota horizontal, quando é infinito o limite de $f(x)$, ou de $f(x)/x$, quando x tende para infinito.
   É também atribuído 1 ponto à conclusão de que o gráfico de f admite assimptota horizontal, quando x tende para $-\infty$. Tal deve ser entendido desta forma: esse ponto deve ser atribuído sse o examinando evidenciar o conhecimento de que o gráfico da função tem assimptota horizontal, quando é finito o limite de $f(x)$, quando x tende para infinito.

2. Não se exige a escrita da equação da assimptota horizontal $(y = 0)$. Basta referir a existência de assimptota horizontal, quando x tende para $-\infty$ (o enunciado pede para estudar a função, quanto à **existência** de assimptotas).

3. Não se aceita, para levantar a indeterminação, um argumento do tipo «*o numerador cresce mais rapidamente do que o denominador*», por falta de rigor científico de uma tal frase. De facto, $2x$ também cresce mais rapidamente do que x, e, no entanto, não é verdade que $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x/x) = +\infty$. Uma justificação deste tipo deve ser cotada da mesma forma que uma não justificação, ou seja, de acordo com a nota 2 dos critérios.

4. Na «*cotação a atribuir*» ao exemplo 1 dos critérios existe uma correcção a fazer: onde está
   $3(2+1+0)+1(0+1)+1(0+0+1)=5$
   deve estar
   $3(2+1+0)+1(0+1)+0(0+0+0)=4$

Questão 2.2.

1. Em situação idêntica à do exemplo 1 dos critérios, mas onde o examinando não apresenta a conclusão $a \approx 0,15$ e $b \approx 2,27$, devem ser atribuídos
   $4+4+4=12$ pontos.
   Numa situação idêntica à do exemplo 1 dos critérios, mas onde o examinando indica também as ordenadas dos pontos e não apresenta a conclusão $a \approx 0,15$ e $b \approx 2,27$, devem ser atribuídos
   $4+3+3=10$ pontos.

2. Aceita-se uma resolução em que o examinando apresenta o gráfico da função que toma o valor 0, se x não é solução da inequação e que toma o valor 1, se x é solução da inequação. Na cotação a atribuir, deve ter-se em conta que se considera que este gráfico está correctamente apresentado se:
   - os segmentos verticais (correspondentes aos pontos de descontinuidade da função) estiverem a tracejado;
   - as bolas abertas e fechadas estiverem devidamente assinaladas (as bolas fechadas devem estar assinaladas na parte do gráfico contida na recta de equação $y = 1$);
   - os valores aproximados das abcissas dos pontos de descontinuidade estiverem devidamente assinalados.

3. Se o examinando, enveredando pelo processo do exemplo 4, se engana a passar a expressão que está no segundo membro para o primeiro, e obtém, no primeiro membro, a expressão de uma função que só tem um zero, deve ser cotado com
$2 + 0 + 0 = 2$ pontos.

4. A escrita do intervalo $[0,15\,;\,2,27]$ está formalmente incorrecta (pois, por exemplo, 2,269 pertence ao intervalo e não é solução da inequação).
Como tal, a escrita do intervalo deve ser penalizada em 1 ponto.
Os extremos do intervalo são números irracionais
(são as soluções da equação $3 + ln\,x = \frac{e^x - 1}{x}$).
O que se pede não é o intervalo, que não se pode pedir, mas sim valores (arredondados às centésimas) dos extremos do intervalo.

5. A escrita do intervalo $]0,15\,;\,2,27[$ também está formalmente incorrecta.
Como tal, a escrita deste intervalo também deve ser penalizada em 1 ponto.

Questão 3.2.

1. Na nota 3 é indicada uma penalização para o caso de o examinando não respeitar a indicação de conservação de um mínimo de duas casas decimais, nos cálculos intermédios. Aceita-se, contudo, sem penalização, a escrita de 8,7 (em vez de 8,70), desde que seja o único caso de não respeito da referida instrução.

2. Se, numa situação idêntica à do exemplo 6 dos critérios, o examinando escrever $d^2 = 2,25^2 \times 2,5^2$, donde $d \approx$ 5,6, em vez de $d^2 = 2,25^2 + 2,5^2$, donde $d \approx$ 3,4, deverão ser atribuídos 4 pontos na etapa relativa à aplicação do Teorema de Pitágoras. Estes 4 pontos têm a seguinte justificação: a etapa vale 8 pontos; o examinando comete um erro grave; pelo critério geral 4.2 não pode ter mais do que 4 pontos; por outro lado, o examinando revela perceber que a chave da resolução do problema está na aplicação do referido teorema e revela possuir alguma ideia do mesmo. Parece, portanto, razoável atribuir 4 pontos.

3. Se, numa situação idêntica à do exemplo 6 dos critérios, o examinando escrever $d = 2,25^2 + 2,5^2$, donde $d \approx$ 11,3, em vez de $d^2 = 2,25^2 + 2,5^2$, donde $d \approx$ 3,4, deve receber igualmente 4 pontos na etapa relativa à aplicação do Teorema de Pitágoras.
Se o examinando escrever a igualdade $d^2 = 2,25^2 + 2,5^2$, e depois se esquecer de determinar a raiz quadrada da soma $2,25^2 + 2,5^2$, comete um erro de distracção. Deve ser penalizado em 1 ponto.

4. O examinando pode não utilizar o Teorema de Pitágoras e utilizar um caminho trigonométrico. Também neste caso, a última etapa (8 pontos) deve ser cotada de acordo com os critérios gerais 4.1 e 4.2.

Questão 4.
A apresentação de uma tabela do tipo

α	0		1
f''	0	$-$	0
f		$\frown$	

deve ser cotada com 0 (zero) pontos.

Questão 5.1.
Se o examinando escrever, por exemplo, $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{1}{3}$ e depois justificar correctamente o valor 1/3, utilizando o 1º processo, considera-se que o examinando resolveu o problema pelo 1º processo e não pelo 2º processo.
Neste caso, a nota 2, relativa ao 2º processo, não é aplicável.
Mesmo assim, considera-se que se deve penalizar em 3 pontos a resposta do examinando, pelo facto de a fórmula estar incorrecta (apesar de não ter sido utilizada).

Questão 5.2.
A nota 4 deve ser entendida da seguinte forma: se o examinando indicar apenas o número de casos favoráveis ou apenas o número de casos possíveis, deve receber a cotação indicada (2 pontos), dado que se trata de uma resposta incompleta.
Já a escrita de uma fracção que não seja uma das apresentadas deve merecer a cotação indicada (0 pontos), dado que se trata de uma resposta errada. Isto significa que uma resposta onde se indique que a probabilidade pedida é, por exemplo, $5^2/6^2$ deve ser cotada com 0 pontos (apesar do numerador, correspondente ao número de casos favoráveis, estar correcto).

Questão 6.
É importante destacar que, nesta questão, o que se está a avaliar é a capacidade de comunicação, isto é, a capacidade de explicar, em linguagem clara, um certo raciocínio. Portanto, não se está simplesmente a avaliar se o examinando sabe resolver o problema. Pretende-se mais do que isso: pretende-se que o examinando consiga explicar claramente a expressão do enunciado, utilizando uma linguagem rigorosa, do ponto de vista matemático. Assim, a utilização da grelha de classificação desta questão deve ter como pano de fundo estas considerações.

Adenda nº 2 aos critérios de classificação do Exame de Matemática - código 435 - 2ª Fase - 2004

Questão 1.1.
Uma resolução baseada na passagem de w à forma trigonométrica, utilizando um valor aproximado para o argumento, não respeita a indicação, dada no enunciado, de não utilização da calculadora. De acordo com o critério geral 7, a etapa em que se dá o referido desrespeito, bem como todas as subsequentes, que dela dependam, devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.

Questão 1.2.
A resposta $iw = 3 + 4i,\ iw = 5\,cis\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ deve ser cotada, de acordo com o 2º processo, em $0 + 2 + 5(1 + 4(0 + 4))$ pontos (ver nota 2 da Adenda 1, relativa a esta questão).

Questão 2.1.2.

1. A escrita de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ e/ou de $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ e/ou de $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, sem o respectivo cálculo, não merece qualquer pontuação.

2. Se, no cálculo de $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, o examinando escrever $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x} =$
$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, sem explicar a primeira passagem, devem ser atribuídos 3 pontos ao cálculo do limite (considera-se equivalente à escrita directa do valor do limite).

3. Se, no estudo das assimptotas verticais, o examinando se limitar a escrever algo como «$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, *portanto há assimptota vertical de equação* $x = 1$» deve ser cotado em zero pontos nesta etapa .

Questão 2.2.

1. Se o examinando, após a apresentação do gráfico, com os pontos de intersecção devidamente assinalados, com as respectivas abcissas correctas, concluir valores para a e para b diferentes dessas abcissas (por exemplo, $a = 0$ e $b = +\infty$), ou indicar, para a e para b, pares ordenados, deverá ter a cotação de 0 (zero) pontos relativamente aos valores de a e de b, pelo que a cotação máxima a atribuir à sua resposta deverá ser de 4 pontos (relativos à apresentação do gráfico).

2. Pode acontecer que o examinando troque, no primeiro membro da inequação, a expressão de $f(x)$ pela expressão de $f'(x)$, calculada na alínea anterior. Considera-se isso um erro de distracção, que deve ser penalizado em 1 ponto. A restante resolução deve ser cotada de acordo com os critérios de classificação e a adenda nº 1.

3. Também pode acontecer que o examinando, ao introduzir na calculadora a expressão de $f(x)$, não coloque o numerador dentro de parêntesis. Considera-se isso um erro grave, que deve ser penalizado em 2 pontos. Nesta situação, os gráficos de f e de g intersectam-se num único ponto, pelo que a cotação máxima a atribuir deve ser $2 + 0 + 0 = 2$ pontos.

Questão 3.1.

1. No contexto da nota 2 dos critérios de classificação, a resposta $b(0) = p(0) = 0$, $b(1) = p(1) = 0$, ... , $b(5) = p(5) = 0$, deverá ser cotada com 0 (zero) pontos.

2. Se o examinando resolver as equações $b(t) = 10$ e $p(t) = 10$, concluindo que, em ambos os casos, se tem $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, não prova que não existam outros instantes em que as bolas estejam à mesma altura (diferente de 10). Esta situação deverá ser cotada de acordo com a nota 2 dos critérios, ou seja, com um máximo de 7 pontos.

3. A resposta «$b(0) = p(0) = 10$; $b(5) = p(5) = 10$; *acontece seis vezes porque ao fim de cada segundo, o seno volta a ser zero e a distância volta a ser* 10» considera-se equivalente à da nota 2, pelo que deverá ser cotada com 7 pontos.

Questão 3.2.

1. O cálculo de $p(0{,}3)$ e de $b(0{,}3)$, em vez de $p(0{,}5)$ e de $b(0{,}5)$, deve ser considerado um erro de distracção, que deverá ser penalizado em 1 ponto, em cada um destes cálculos. Esta norma não se aplica a valores completamente disparatados, como, por exemplo, $p(23)$ e $b(23)$.

2. O cálculo de $p(30)$ e de $b(30)$, em vez de $p(0{,}5)$ e de $b(0{,}5)$, também deve ser considerado um erro de distracção (o examinando trabalha em segundos, em vez de minutos), que deverá ser penalizado em 1 ponto, em cada um destes cálculos. Chama-se, contudo, a atenção para o facto de os valores de $p(30)$ e de $b(30)$ serem iguais. As etapas seguintes devem, por isso, ser cotadas tendo em conta o exemplo 4 dos critérios.

3. Se o examinando trabalhar com a máquina em modo graus e escrever $p(0{,}5) \approx 9,96$ e $b(0{,}5) \approx 10,03$, deve ser cotado com um ponto em cada um destes cálculos. A restante resolução deve ser cotada de acordo com os critérios e com a adenda nº 1.

Questão 5.1.

1. A simples referência ao facto de existirem três casos possíveis (sem os explicitar) e um favorável (sem o explicitar) não serve como justificação. Esta situação deve ser cotada com 0 (zero) pontos.

2. Se o examinando referir que «*sair face par é sair 2, 4 ou 6 e sair face menor do que 4 é sair 2*», mas não escrever o valor da probabilidade pedida, a sua resposta deve ser cotada em 5 pontos.

3. Se o examinando apresentar a probabilidade pedida na forma de dízima finita, não respeita a instrução geral de apresentação do valor exacto, quando não é pedida aproximação. Deve ser penalizado em 1 ponto.

Questão 5.1.

O ponto relativo à escrita da probabilidade na forma de percentagem só deve ser atribuído no caso em que a resposta esteja correctamente arredondada às décimas (de acordo com o enunciado).

Questão 6.

Na avaliação do nível da composição (1, 2 ou 3), apenas devem ser tidos em conta os pontos que foram considerados como contemplados pelo examinando.