Resoluções

Grupo I

Questões de resposta de escolha múltipla

1. $D_g = \{x \in \mathbb{R} : \ f(x) \geq 0 \ \wedge \ x \in D_f\}$

$f(x) \geq 0 \ \wedge \ x \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow \ x \in [-3, +\infty[$

Resposta: **D**

2. Como f tem domínio $\mathbb{R} \setminus \{5\}$, é contínua e $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = -3$, pode-se concluir que o gráfico de f não admite assimptotas verticais.

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$, conclui-se que $y = 2$ é uma assimptota horizontal.
Como $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x] = 0$, conclui-se que $y = x$ é uma assimptota oblíqua.
Então, as assimptotas do gráfico de f são $y = 2$ e $y = x$.

Resposta: **A**

3. $f'(\pi) = \lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\cos x + 1}{x - \pi}$

Resposta: **A**

4. A área do triângulo $[ABO]$ é dada por $\dfrac{\overline{OB} \times \overline{AB}}{2}$.

Tem-se: $\overline{AB} = 3$ e $\overline{OB} = f(3)$.

$\overline{OB} = f(3) \ \Leftrightarrow \ \overline{OB} = \log_2 4 \ \Leftrightarrow \ \overline{OB} = 2$. Então $\dfrac{\overline{OB} \times \overline{AB}}{2} = \dfrac{2 \times 3}{2} = 3$

Resposta: **C**

5. Os acontecimentos X e Y podem ser possíveis e incompatíveis.

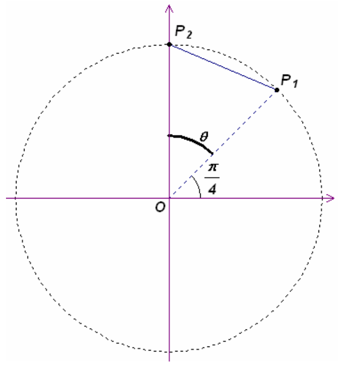
Resposta: **D**

6. Se a média da variável aleatória X é 1, então $0\times a+2\times b+4\times b=1$.
Por outro lado, $\sum p_i=1$

Então $\begin{cases}0+2b+4b=1\\ a+b+b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6b=1\\ a+2b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\dfrac{1}{6}\\ a+\dfrac{1}{3}=1\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}b=\dfrac{1}{6}\\ a=\dfrac{2}{3}\end{cases}$

Resposta: **C**



7. Seja $\theta=\arg(z_2)-\arg(z_1)$

$$\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

Então, $\dfrac{2\pi}{n}=\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow n=\dfrac{8\pi}{\pi} \Leftrightarrow n=8$

Resposta: **C**

Grupo II

Questões de resposta aberta

1.1 $w=\dfrac{2+i}{1-i}-i = \dfrac{(2+i)(1+i)}{1+1}-i = \dfrac{2+2i+i-1}{2}-i = \dfrac{1+3i-2i}{2} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}$

$$\left|\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Seja $\arg(w)=\theta$

$tg\theta=1 \quad \wedge \quad \theta\in 1^{\text{o}}\,Quadrante$. Então, $\theta=\dfrac{\pi}{4}$. Conclui-se que $w=\dfrac{\sqrt{2}}{2}cis\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

1.2 $z_1=cis\alpha$; $\quad z_2=cis\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$$z_1+z_2=\cos\alpha+isen\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+isen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad z_1 + z_2 = \cos\alpha + i sen\alpha + sen\alpha + i\cos\alpha \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad z_1 + z_2 = \cos\alpha + sen\alpha + i\left(\cos\alpha + sen\alpha\right)$$

Pode-se observar que $\mathrm{Re}\left(z_1+z_2\right)=\mathrm{Im}\left(z_1+z_2\right)$, o que significa que a imagem geométrica pertence à bissectriz dos quadrantes ímpares.

2.1 $\lim\limits_{t\to+\infty} P(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(5,2\times10^7\times e^{(N-M)t}\right)$

$N < M \quad \Leftrightarrow \quad N - M < 0$.

Então, quando $t\to+\infty$, $\left(N-M\right)t\to-\infty$ e $e^{(N-M)t}\to 0$.

Assim, $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(5,2\times10^7\times e^{(N-M)t}\right)=0$

Como a taxa de natalidade N é menor que a taxa de mortalidade M, com o decorrer do tempo, a população tende a extinguir-se.

2.2 Seja $N = 7,56$.

$$P(30) = \frac{P(0)}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 5,2\times10^7\times e^{(7,56-M)\times30} = \frac{5,2\times10^7}{2} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad e^{226,8-30M} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 226,8-30M = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad 226,8-30M = \ln 1 - \ln 2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad -30M = -226,8-\ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad M = \frac{226,8+\ln 2}{30}$$

Conclui-se que $M \simeq 7,58$

3.1 A área da região sombreada corresponde à soma das áreas dos sectores circulares correspondentes aos arcos DB e AC e dos triângulos $[AOB]$ e $[DOC]$.

Área do sector circular correspondente ao arco DB $= \dfrac{3^2\times2x}{2} = 9x$

Área do triângulo $[AOB]$ = $\dfrac{\overline{AB}\times\overline{IO}}{2}$.

Atendendo a que $\overline{AB} = 2\overline{IB} = 2\times3\cos x = 6\cos x$ e $\overline{OI} = 3 sen x$

Área do triângulo $[AOB] = \dfrac{6\cos x\times 3 sen x}{2} = 9 sen x\cos x$

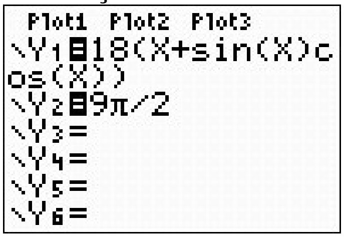
Então, $A(x) = 2\times9x + 2\times9 sen x.\cos x \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = 18x + 18 sen x.\cos x \quad \Leftrightarrow$

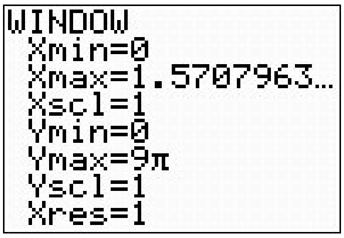
$$\Leftrightarrow \quad A(x) = 18x + 18 sen x.\cos x \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = 18\left(x + sen x.\cos x\right)$$

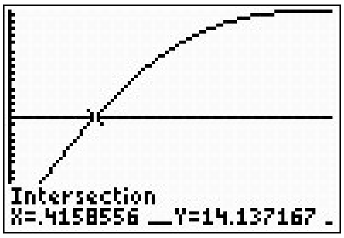
3.2 Pretende-se resolver graficamente a equação $A\left(x\right) = \dfrac{9\pi}{2}$

Considerem-se, na calculadora, a função $A(x)$ e a recta $y = \dfrac{9\pi}{2}$

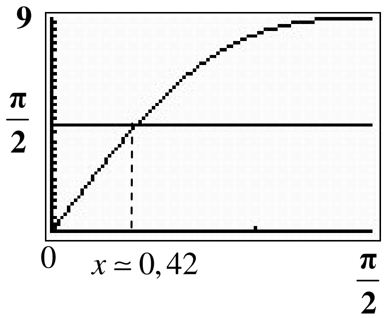
A janela de visualização deve atender ao domínio da função, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, e à área do círculo, $0 \le A(x) \le 9\pi$. Em seguida determina-se o ponto de intersecção dos gráficos das funções consideradas.







Atendendo aos dados e ao que é visualizado na calculadora conclui-se que o valor de *x* é 0,42.



4.1 Seja *r:* $y = mx + b$.

Sabe-se que $m = f'(1)$ e o ponto $(1,3)$ é o ponto de tangencia.

Então, $m = 2$ e $3 = 2\times 1 + b \Leftrightarrow b = 1$.

r: $y = 2x + 1$.

$$\begin{cases} y = 2x+1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2x+1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases} \qquad P\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

A abcissa do ponto P é $-\frac{1}{2}$.

4.2 $f'(x) = 2 + x\ln x$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$f''(x) = \ln x + 1$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f''(x)$	**-**	0	**+**
$f(x)$	$\cap$	P.I.	$\cup$

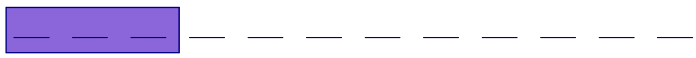
Existe um ponto de inflexão para $x = \frac{1}{e}$.

5.1 Considere-se a possibilidade de sair em 1º lugar uma bola preta e, em segundo lugar, uma branca, ou por ordem contrária.

$$P(A) = \frac{3}{12} \times \frac{9}{11} + \frac{9}{12} \times \frac{3}{11} = 2 \times \frac{9}{4 \times 11} = \frac{9}{22}$$

5.2 Considere-se a extracção sucessiva e sem reposição das doze bolas existentes no saco.

Nº de casos possíveis = ${}^{12}A_{12} = 12!$



Considerem-se as três bolas pretas juntas. As nove bolas brancas , mais o conjunto das pretas constituem dez elementos que podem permutar entre si.
Dentro do conjunto das bolas pretas, estas podem permutar, também, entre si.

Nº de casos favoráveis = $10! \times 3!$

$$p = \frac{10! \times 3!}{12!} = \frac{1}{22}$$

6. Se cada base do prisma tem *n* lados, então, com os respectivos *n* vértices é possível formar ${}^{n}C_2$ segmentos de recta. Desses segmentos de recta, n correspondem aos lados da base, concluindo-se assim que, cada base tem ${}^{n}C_2 - n$ diagonais.

Relativamente às faces laterais, sendo rectângulos, cada uma tem duas diagonais. Como o número de faces laterais é *n*, existem $2n$ diagonais na totalidade das faces laterais.

Assim, o número total de diagonais do prisma é dado por:

$$2\left({}^{n}C_2 - n\right) + 2n$$