Resoluções

Grupo I

Questões de resposta de escolha múltipla

1. O gráfico de g obtém-se a partir do gráfico de *f* através d uma translação associada ao vector $(-1,1)$.

Resposta: **D**

2. Se *f* é contínua, e como $f(7) < 2 < f(3)$, pelo Teorema de Bolzano pode-se concluir que $\exists c \in \left]3,7\right[: \quad f(c) = 2$, pelo que 2 pertence ao contradomínio de *f*.

Resposta: **D**

3. À medida que o ponto P, partindo de A se desloca sobre a circunferência, a área da região sombreada aumenta até $x = \frac{\pi}{2}$ (altura máxima do triângulo), diminuindo até atingir o valor zero quando $x = \pi$.
O comportamento repete-se quando x varia de π a 2π.

Resposta: **A**

4. A função *f* deve admitir um zero para $x = -1$. Por outro lado, com h tem sinal contrário ao de g quando $x \in \left]-\infty, -1\right[$, nesse intervalo *f* deve tomar valores negativos.

Resposta: **C**

5. Para que o produto dos três números seja par, pelo menos um dos factores deve ser par.

Como é impossível os três factores serem ímpares, então a probabilidade pedida é a de um acontecimento certo.

Resposta: **B**

6. Metade do número de figuras pintadas de preto, devem ser quadrados.

Resposta: **B**

7. Calculando o cubo das duas raízes, deve-se obter o mesmo número complexo.

Os números indicados na opção A satisfazem esta condição:

$$\left(cis\frac{\pi}{6}\right)^3 = cis\frac{\pi}{2} \qquad \text{e} \qquad \left(cis\frac{5\pi}{6}\right)^3 = cis\left(\frac{5\pi}{2}\right) = cis\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Resposta: **A**

Grupo II

Questões de resposta aberta

1.1 Considere-se $1+i$ na forma trigonométrica: $\left(\sqrt{2}cis\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\frac{w_1\times w_2-2}{w_3}=\frac{(1+i)\left(\sqrt{2}cis\frac{\pi}{12}\right)-2}{\sqrt{3}cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\left(\sqrt{2}cis\frac{\pi}{4}\right)\left(\sqrt{2}cis\frac{\pi}{12}\right)-2}{\sqrt{3}cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=$$

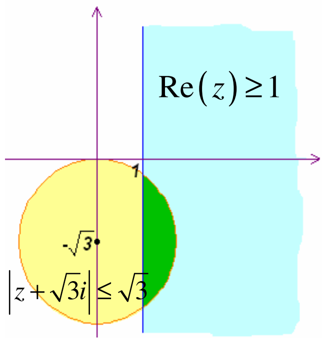
$$\frac{2cis\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)-2}{\sqrt{3}cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{2cis\left(\frac{\pi}{3}\right)-2}{\sqrt{3}cis\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-2}{-\sqrt{3}i}=\frac{2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-2}{-\sqrt{3}i}=$$

$$\frac{1+\sqrt{3}i-2}{-\sqrt{3}i}=\frac{\left(-1+\sqrt{3}i\right)\times\sqrt{3}i}{3}=-1-\frac{\sqrt{3}}{3}i$$

1.2 $\operatorname{Re}(z)\geq\operatorname{Re}(w_1)\ \Leftrightarrow\ \operatorname{Re}(z)\geq 1$.

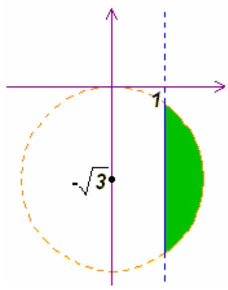
Esta condição define um semiplano

$|z-w_3|\leq\sqrt{3}\ \Leftrightarrow\ \left|z+\sqrt{3}i\right|\leq\sqrt{3}$.



Esta condição define o círculo centrado em $\left(0,-\sqrt{3}\right)$ e de raio $\sqrt{3}$.

A condição $\operatorname{Re}(z)\geq\operatorname{Re}(w_1)\ \wedge\ \left|z+\sqrt{3}i\right|\leq\sqrt{3}$ define a intersecção do semiplano e do círculo representados na figura.



2.1.1 O João vai seleccionar um dos seis discos portugueses, um dos quatro espanhóis, um dos três franceses e necessariamente o italiano.
Pode, assim, efectuar $6\times4\times3\times1$ escolhas diferentes, isto é, 72 conjuntos distintos.

2.1.2 Para que os quatro discos sejam do mesmo país, a escolha só pode recair sobre discos portugueses ou espanhóis.
Então, o número de escolhas possíveis é ${}^{6}C_4+{}^{4}C_4=16$.

2.2 Ao seleccionar 4 dos 14 discos, o número de casos possíveis é ${}^{14}C_4$

Considere-se a variável aleatória X: nº de discos italianos seleccionados

Os valores possíveis da variável são 0 e 1.

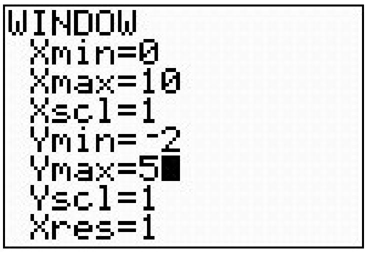
$$P(X=0)=\frac{{}^{13}C_4}{{}^{14}C_4}=\frac{5}{7}$$

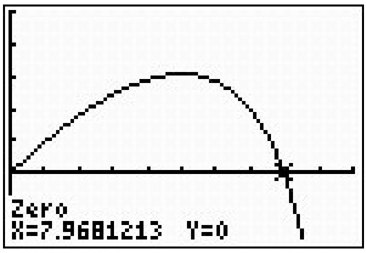
$$P(X=1)=\frac{{}^{13}C_3}{{}^{14}C_4}=\frac{2}{7}$$

x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$

3.1 Para determinar o valor de *a* basta identificar um ponto do gráfico da função que admita ordenada zero e abcissa positiva.

Considerando a função dada na calculadora , e utilizando uma janela que possibilite a identificação do zero pretendido, pode visualizar-se o seguinte:





Conclui-se que $a \simeq 7,97$.

3.2 Tem-se $h'(x)=2+10\frac{(1-0,1x)'}{1-0,1x}=2-\frac{1}{1-0,1x}$

$$h'(x)=0 \Leftrightarrow 2-\frac{1}{1-0,1x}=0 \Leftrightarrow \frac{2-0,2x-1}{1-0,1x}=0 \Leftrightarrow \frac{1-0,2x}{1-0,1x}=0 \Leftrightarrow$$

$$1-0,2x=0 \wedge 1-0,1x\neq 0 \Leftrightarrow x=5$$

x	0		5		a
$h'(x)$	+	+	0	-	-
$h(x)$	0	$\nearrow$	Max.	$\searrow$	0

A função é crescente em $[0,5]$ e decrescente em $[5,a]$, atingindo um máximo de, aproximadamente 3,07 para $x=5$.

Conclui-se assim que a bola atinge a altura máxima de 3,07m.

3.3 Tem-se:

$$t.m.v._{[1,3]}=\frac{h(3)-h(1)}{3-1} = \frac{6+10\ln(0,7)-2-10\ln(0,9)}{2} =$$

$$\frac{4+10(\ln(0,7)-\ln(0,9))}{2} = 2+5\ln\left(\frac{0,7}{0,9}\right) = \ln\left(e^2\right)+\ln\left(\frac{7}{9}\right)^5 = \ln\left[\left(e^2\right)\left(\frac{7}{9}\right)^5\right]$$

4.1 Se $f(x) = senx$, então $f'(x) = \cos x$

Sabe-se que $a + b = 2\pi \iff b = 2\pi - a$

O declive da recta s é dado por $f'(b) = \cos b = \cos(2\pi - a) = \cos a = f'(a)$

Como $f'(b) = f'(a)$, as rectas r e s são paralelas.

4.2 Atendendo à continuidade da função *g* em todo o seu domínio, uma vez que resulta do quociente entre duas funções contínuas, deduz-se que, se existirem assimptotas verticais, serão $x = 0$, $x = 2\pi$ ou $x = \pi$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{f(x)} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{senx} = 1$. Então $x = 0$ **não** é assimptota do gráfico de *g*.

$\lim\limits_{x \to 2\pi^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 2\pi^-} \frac{x}{f(x)} = \lim\limits_{x \to 2\pi^-} \frac{x}{senx} = -\infty$. (Quando $x \to 2\pi^-$, $senx \to 0^-$)

A recta de equação $x = 2\pi$ **é** uma assimptota vertical do gráfico de *g*.

$\lim\limits_{x \to \pi^-} g(x) = \lim\limits_{x \to \pi^-} \frac{x}{f(x)} = \lim\limits_{x \to \pi^-} \frac{x}{senx} = +\infty$. (Quando $x \to \pi^-$, $senx \to 0^+$)

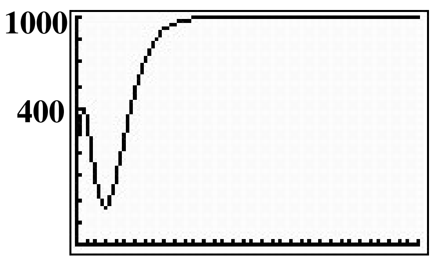
$\lim\limits_{x \to \pi^+} g(x) = \lim\limits_{x \to \pi^+} \frac{x}{f(x)} = \lim\limits_{x \to \pi^+} \frac{x}{senx} = -\infty$. (Quando $x \to \pi^+$, $senx \to 0^-$)

Conclui-se que a recta de equação $x = \pi$ **é** uma assimptota vertical do gráfico de *g*.
Como o domínio de *g* é um conjunto limitado, não existem assimptotas não verticais.

5. A opção A não corresponde à situação descrita uma vez que, a imagem de zero por esta função é 500 e, segundo o enunciado, no início de 1972 ($t = 0$) havia 400 lobos.

A opção C está também incorrecta uma vez que $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1200}{1 + 2e^{-t}} = 1200$, o que contraria o enunciado pois os recursos não permitem que o número de lobos ultrapasse 1000.

Ao visualizar-se na calculadora o gráfico da função considerada na opção D, verifica-se que esta não é crescente, pelo que também não corresponde à situação descrita no enunciado.



Assim, conclui-se que a opção correcta é a B.