PROVA 435

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos

2005

Época Especial

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

A prova é constituída por dois Grupos, I e II.

- O Grupo I inclui sete questões de escolha múltipla.
- O Grupo II inclui cinco questões de resposta aberta, algumas delas subdivididas em alíneas, num total de dez.

Grupo I

- As sete questões deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações.**

1. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, definida por $f(x)=\frac{x-2}{x-3}$

Em cada uma das opções seguintes estão escritas duas equações.

Em qual das opções as duas equações definem as assimptotas do gráfico de f ?

(A) $x=2$ e $y=1$

(B) $x=2$ e $y=2$

(C) $x=3$ e $y=1$

(D) $x=3$ e $y=2$

2. Para um certo valor de k, é contínua em $\mathbb{R}$ a função f definida por

$$f(x)=\begin{cases} k+\operatorname{sen} x & \text{se} \quad x\leq 0 \\ \dfrac{3x+\ln(1+x)}{x} & \text{se} \quad x>0 \end{cases}$$

($\ln$ designa logaritmo de base e)

Qual é o valor de k ?

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

3. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a sua **derivada** é dada por

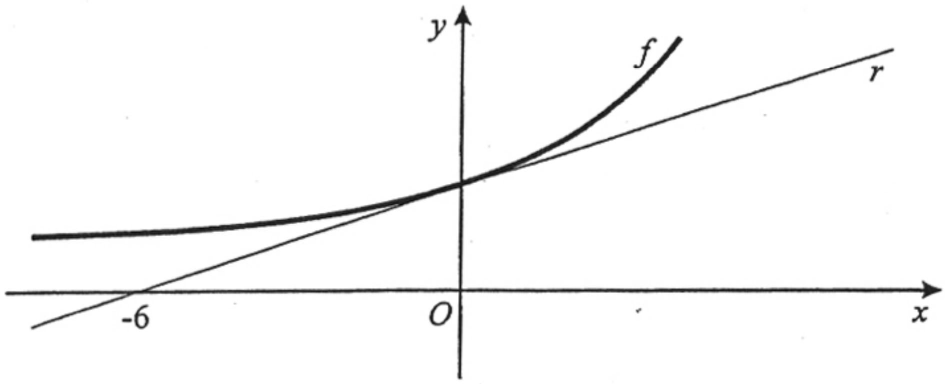
$$f'(x) = x^3 - 3x + 1.$$

Em qual dos conjuntos seguintes o **gráfico de** f tem a concavidade voltada para baixo?

(A) $]-1, 1[$ **(B)** $]-\infty, -1[$

(C) $]0, 3[$ **(D)** $]-\infty, 0[$

4. Na figura está representada, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{ax} + 1$ (a é uma constante real positiva).



Na figura está também representada a recta r, que é tangente ao gráfico de f no ponto em que este intersecta o eixo Oy.

A recta r intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa -6.

Qual é o valor de a?

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{3}{2}$

5. Um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, é lançado duas vezes.

Seja X a variável aleatória que designa o «*número de vezes que, nesses dois lançamentos, sai face par*».

A distribuição de probabilidades da variável X é

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	a	b

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $a = \frac{1}{4}$ e $b = \frac{1}{2}$

(B) $a = \frac{1}{4}$ e $b = \frac{1}{4}$

(C) $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{4}$

(D) $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$

6. Escolhe-se, ao acaso, um aluno de uma turma de uma escola secundária.
Considere os acontecimentos:
A: «O aluno é uma rapariga»
B: «O aluno não usa óculos»
Qual é o acontecimento **contrário** de $A \cup B$?

(A) O aluno é um rapaz e usa óculos

(B) O aluno é um rapaz e não usa óculos

(C) O aluno é um rapaz ou usa óculos

(D) O aluno é um rapaz ou não usa óculos

7. Considere, no plano complexo, um ponto A, imagem geométrica de um certo número complexo z. Sabe-se que A não pertence a qualquer um dos eixos do plano complexo.
Seja B o ponto simétrico do ponto A, relativamente ao eixo imaginário.

Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o ponto B?

(A) $\overline{z}$

(B) $\frac{1}{z}$

(C) $-\overline{z}$

(D) $-z$

Grupo II

> Nas questões deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.
>
> **Atenção**: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = cis\left(\frac{\pi}{6}\right)$

1.1. Sem utilizar a calculadora, determine o valor de $\dfrac{\left[i \times (z_1)^6 - 1\right]^2}{i}$

Apresente o resultado na forma algébrica.

1.2. Represente, no plano complexo, o conjunto definido pela condição

$$|z - z_1| \leq 1 \quad \wedge \quad |z| \leq |z - z_1|$$

2. Seis amigos, a Ana, o Bruno, a Catarina, o Diogo, a Elsa e o Filipe, vão jantar a um restaurante. Sentam-se, ao acaso, numa mesa redonda, com seis lugares (pode considerar que os lugares estão numerados, de 1 a 6).

2.1. Sejam os acontecimentos:

A : «O Diogo, a Elsa e o Filipe sentam-se em lugares consecutivos, ficando a Elsa no meio.»

B : «A Catarina e o Filipe sentam-se ao lado um do outro.»

2.1.1. Determine a probabilidade do acontecimento A.
Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

2.1.2. Sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, indique o valor de $P(B|A)$. Numa pequena composição, justifique a sua resposta, começando por explicar o significado de $P(B|A)$, no contexto da situação descrita.

2.2. Depois de sentados, os seis amigos resolvem escolher a refeição.
Sabe-se que:

- na ementa, existem três pratos de peixe e quatro de carne;
- cada um dos seis amigos vai escolher um único prato, de peixe ou de carne;
- só o Filipe está indeciso se vai escolher peixe ou carne;
- os restantes cinco vão escolher peixe.

De quantas maneiras diferentes podem os seis amigos escolher os seus pratos?

3. O tempo t, medido em anos, que um planeta demora a realizar uma translação completa, em torno do Sol, está relacionado com a distância média, d, desse planeta ao Sol, medida em milhões de quilómetros, por meio da fórmula

$$2 \ln(t) = k + 3 \ln(d)$$

(k é uma constante real e $\ln$ designa logaritmo de base e)

Sem utilizar a calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes:

3.1. Sabe-se que:

- a distância média de Urano ao Sol é (aproximadamente) o dobro da distância média de Saturno ao Sol;
- o planeta Urano demora (aproximadamente) 84 anos a realizar uma translação completa em torno do Sol.

Determine quanto tempo demora o planeta Saturno a realizar uma translação completa em torno do Sol. Apresente o resultado em anos, arredondado às décimas.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3.2. Sabendo que a distância média da Terra ao Sol é, aproximadamente, de $149{,}6$ milhões de quilómetros, determine o valor de k (apresente o resultado arredondado às unidades).

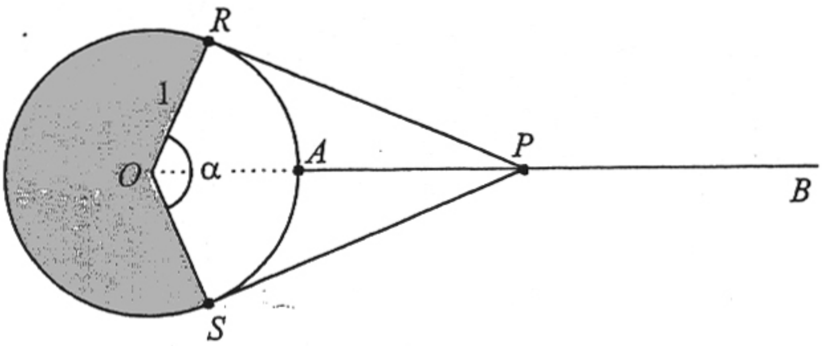
4. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- f tem derivada finita em todos os pontos de $\mathbb{R}$
- $f(0) = -1$
- f é estritamente crescente em $\mathbb{R}^-$ e é estritamente decrescente em $\mathbb{R}^+$

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = [f(x)]^2$.

Prove que 1 é o mínimo da função g.

5. Na figura estão representadas uma semi-recta $\dot{A}B$ e uma circunferência de centro O e raio 1 (os pontos O, A e B são colineares; o ponto A pertence à circunferência).



Considere que um ponto P se desloca ao longo da semi-recta $\dot{A}B$, nunca coincidindo com o ponto A.

Os pontos R e S acompanham o movimento do ponto P, de tal forma que as rectas PR e PS são sempre tangentes à circunferência, nos pontos R e S, respectivamente.

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo SOR $(\alpha \in]0, \pi[)$.

5.1. Mostre que a área do **quadrilátero** $[ORPS]$ é dada, em função de α, por $f(\alpha) = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

5.2. Calcule $\lim\limits_{\alpha \to \pi^-} f(\alpha)$ e interprete geometricamente o resultado obtido.

5.3. Recorra à calculadora para determinar **graficamente** a solução da equação que lhe permite resolver o seguinte problema:

Qual é o valor de α para o qual a área do quadrilátero $[ORPS]$ é igual à área da região sombreada?

Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o **gráfico**, ou **gráficos**, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos. Apresente o valor pedido na forma de dízima, arredondado às décimas.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I	**63**
Cada resposta certa	+9
Cada resposta errada	- 3
Cada questão não respondida ou anulada	0

Nota: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) pontos.

Grupo II	**137**
1.	21
1.1.	11
1.2.	10
2.	32
2.1.	22
2.1.1.	10
2.1.2.	12
2.2.	10
3.	29
3.1.	15
3.2.	14
4.	15
5.	40
5.1.	12
5.2.	14
5.3.	14

TOTAL	**200**