Resoluções

Grupo I

Questões de resposta de escolha múltipla

1. Se as funções só tomam valores positivos, a equação $f(x)+g(x)=0$ é impossível.

Resposta: **A**

2. Atendendo a que $\lim u_n = \lim \frac{n+1}{n^2} = 0$ e que $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x+5}{2+\cos x} = 2$,

Conclui-se que $\lim_{n\to+\infty} g(u_n) = 2$

Resposta: **C**

3. $h(x) = \frac{\ln\left(\sqrt{e^x}\right)}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\left(e^x\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4}\ln\left(e^x\right) = \frac{x}{4}$

Resposta: **C**

4. A recta *r* é definida pela equação $y = x+2$, uma vez que é paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares e passa por $(-2,0)$.
Daqui se deduz que $f(0)=2$, $f'(0)=1$.
Como *f* é contínua e admite um ponto de inflexão para $x=0$, $f''(0)=0$.
$f(0)+f'(0)+f''(0)=2+1+0=3$

Resposta: **C**

5. Como $P(A)=0,3$, então $P\left(\overline{A}\right)=0,7$. Então $P\left(A\cup B\right)\geq 0,3$, $P\left(\overline{A}\cup B\right)\geq 0,7$ e $P\left(\overline{A\cap B}\right)\geq 0,7$.

Resposta: **C**

6. ${}^{2005}C_{99} + a = {}^{2006}C_{100} \Leftrightarrow a = {}^{2005}C_{100}$

Resposta: **B**

7. Facilmente se identificam as raízes quadradas dos números indicados nas diversas opções de resposta.

As raízes quadradas de 1 são 1 e -1 e as raízes quadradas de -1 são i e $-i$.

Sendo $i = cis\frac{\pi}{2}$, tem-se $\sqrt{cis\frac{\pi}{2}} = cis\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right), \quad k \in \{0,1\}$. Então as raízes quadradas de i são $cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e $cis\left(\frac{5\pi}{4}\right)$, sendo representadas por pontos do 1º e 3º quadrantes do plano complexo.

Considerando $-i = cis\frac{3\pi}{2}$, deduz-se que as raízes quadradas de $-i$ são $cis\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ e $cis\left(\frac{7\pi}{4}\right)$, admitindo como afixos A e B.

Resposta: **D**

Grupo II

Questões de resposta aberta

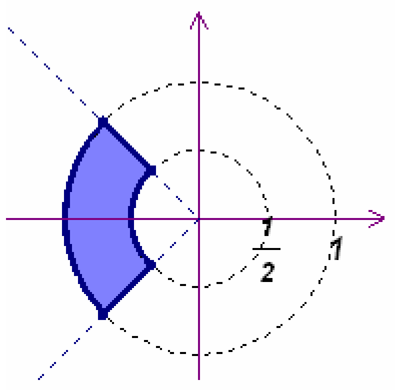
1.1 $\dfrac{4+2i\left(cis\frac{\pi}{6}\right)^6}{3+i} = \dfrac{4+2i(cis\pi)}{3+i} = \dfrac{4+2i(-1)}{3+i} = \dfrac{4-2i}{3+i} = \dfrac{(4-2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \dfrac{12-4i-6i-2}{10} = \dfrac{10-10i}{10} = 1-i$

$|1-i| = \sqrt{2}$. Seja $\theta_1 = \arg(1-i) \quad \wedge \quad \theta_1 \in [0, 2\pi[$

$tg\theta_1 = -1 \quad \wedge \quad \theta_1 \in 4^{o}Q$. Então, $\theta_1 = \frac{7\pi}{4}$, pelo que

$$1-i = \sqrt{2}cis\left(\frac{7\pi}{4}\right)$$

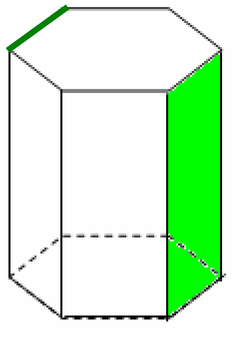
1.2 A área da região definida pela condição referida no enunciado e representada na figura, corresponde à diferença entre as áreas dos sectores circulares de amplitude $\frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ definidos nos círculos.



$$A = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{4} \Leftrightarrow A = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{16} \Leftrightarrow A = \frac{3\pi}{16}$$

A área é de $\frac{3\pi}{16}$ unidades de área.

2.1 De acordo com as condições exigidas, é necessário escolher três das cinco cores disponíveis, uma vez que não se pode voltar a usar a cor verde pois qualquer outra face tem uma aresta comum com alguma das faces já pintadas de verde.



O número de escolhas possíveis é dado por ${}^{5}A_{3} = 60$.

Há 60 maneiras diferentes de pintar as restantes faces do prisma.

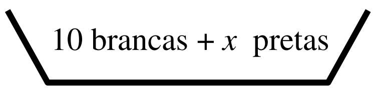
2.2 número de casos possíveis = ${}^{12}C_{2}$ = 66

número de casos favoráveis = 6

Então, $p = \frac{6}{{}^{12}C_{2}} = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$

A probabilidade pedida é $\frac{1}{11}$.

3. Seja x o número de bolas pretas existentes inicialmente na caixa.



Sabe-se que $P(B|A) = \frac{1}{2}$, o que significa que a probabilidade de a segunda bola extraída ser branca, sabendo que na primeira extracção saiu uma bola preta é 50%. Isto significa que, após a primeira extracção, o número de bolas brancas é igual ao número de bolas pretas.

Então, $x - 1 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad x = 11$

Inicialmente havia 11 bolas pretas na caixa.

4.1 Se a abcissa de P é x, $x \in \mathbb{R}^{+}$, então $\overline{OQ} = 2x$.

A altura do triângulo relativamente à base $[OQ]$ é $f(x)$.

Assim, $A(x) = \frac{2x \,.\, e^{-x}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad A(x) = x.e^{-x}$.

4.2 Para estudar a monotonia de A é necessário determinar $A'(x)$.

$$A'(x) = e^{-x} - x.e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad A'(x) = e^{-x}(1-x)$$

$$A'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x}(1-x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=1$$

x	0		1		$+\infty$
$A'(x)$		+	0	-	
$A(x)$		$\nearrow$	Max.	$\searrow$	

A função A atinge um máximo para $x=1$. Daqui se conclui que o valor máximo que a área do triângulo [*OQP*] pode assumir é $A(1) = \frac{1}{e}$

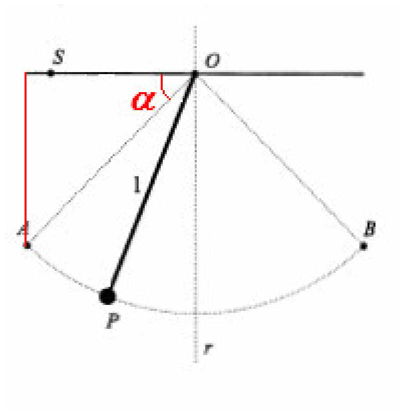
5. Sendo a função *g*, definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = x.f(x)$, pode afirmar-se que é contínua e tem domínio $\mathbb{R}$, uma vez que resulta do produto de duas funções contínuas de domínio $\mathbb{R}$. Por esse motivo, não admite assimptotas verticais.

Como $y = x$ é assimptota do gráfico de *f*, conclui-se que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Daqui se conclui que o gráfico de *g* também não admite assimptotas não verticais.

6.1 Seja d a distância pretendida. Então $d = sen\alpha$



$$\alpha(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\cos\left(\sqrt{9,8}\times 0\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$d = sen\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

O centro da esfera encontra-se a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ metros de distância da recta *OS*.

6.2 O instante em que o centro da esfera pertence a r corresponde a $\alpha(t)=\frac{\pi}{2}$

Ora, $\alpha(t)=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\cos\left(\sqrt{9,8}\,t\right)=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\sqrt{9,8}\,t\right)=0 \Leftrightarrow$

$\sqrt{9,8}\,t=\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\quad k\in\mathbb{Z} \quad\Leftrightarrow\quad t=\frac{\pi}{2\sqrt{9,8}}+\frac{k\pi}{\sqrt{9,8}}\,,\quad k\in\mathbb{Z}$

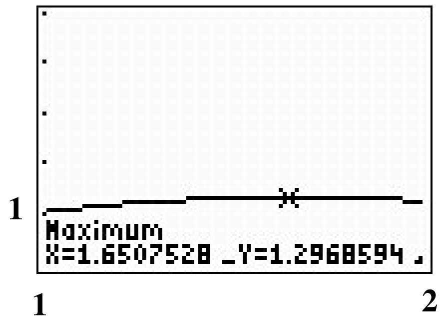
Pretende –se o menor valor positivo de t que satisfaz a condição e que é $t=\frac{\pi}{2\sqrt{9,8}}$.

Conclui-se assim que $t\simeq 0,5$ segundos

7. Sendo $f(x)=\cos(x-1)+\ln x$, visualizando o gráfico pode-se concluir que $f(1)=1$ é o mínimo da função e que o máximo é, aproximadamente 1,297 para $x\simeq 1,651$

Como se pretende que o contradomínio de g seja $[4,5]$, pode-se considerar que:

$$\begin{cases} g(1)=4 \\ g(1,651)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ 1,297a+b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ 1,297a+4-a=5 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ 0,297a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=4-a \\ a=\dfrac{1}{0,297} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0,633 \\ a=3,367 \end{cases}$$

Os valores pedidos são $a\simeq 3,367$ e $b=0,633$.