EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais

Programa novo implementado em 2005/2006

Duração da prova: 120 minutos **2.ª FASE**

2006

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de todo o GRUPO I.

Identifique claramente os grupos e os itens a que responde.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta (excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações).

É interdito o uso de «esferográfica-lápis» e de corrector.

As cotações da prova encontram-se na página 11.

A prova inclui um formulário (pág. 3).

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r \quad$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\, maior \times Diagonal\, menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\, maior + Base\, menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\, \pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\, \pi\, r^3 \qquad$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\, a \,.\, \cos b + \text{sen}\, b \,.\, \cos a$

$\cos\,(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \text{sen}\, a \,.\, \text{sen}\, b$

$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b}{1 - \text{tg}\, a \,.\, \text{tg}\, b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\,(n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\; cis\, \frac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}$, $k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\, v + u\,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.\, v - u\,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\, u^{n-1}\,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\, u)' = u'.\, \cos u$

$(\cos u)' = -\, u'.\, \text{sen}\, u$

$(\text{tg}\, u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\, e^u$

$(a^u)' = u'.\, a^u.\, \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\, \ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln\,(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln\, x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

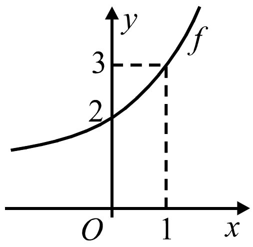
Grupo I

- Os sete itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra, o item será anulado, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Sejam a e b dois números reais positivos.

Na figura está parte do gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a^x + b$.

Tal como a figura sugere, os pontos $(0, 2)$ e $(1, 3)$ pertencem ao gráfico de f.



Quais são os valores de a e de b?

(A) $a = 2$ e $b = 1$

(B) $a = 2$ e $b = 3$

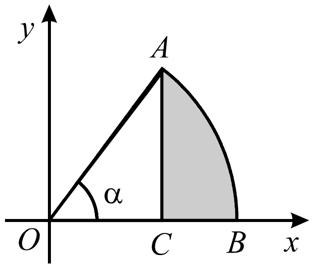
(C) $a = 3$ e $b = 2$

(D) $a = 3$ e $b = 1$

2. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, um arco AB, que está contido na circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$.

O ponto C pertence ao eixo Ox e o segmento de recta $[AC]$ é perpendicular a este eixo.

α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB.



Qual é a expressão que dá o perímetro da região sombreada, em função de α?

(A) $\pi \times \alpha + \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha$

(B) $\pi \times \alpha + \operatorname{sen}\alpha + 1 - \cos\alpha$

(C) $1 + \alpha - \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha$

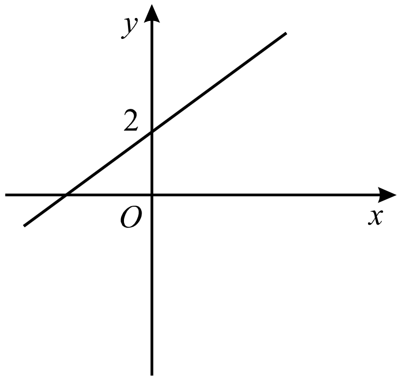
(D) $1 + \alpha + \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha$

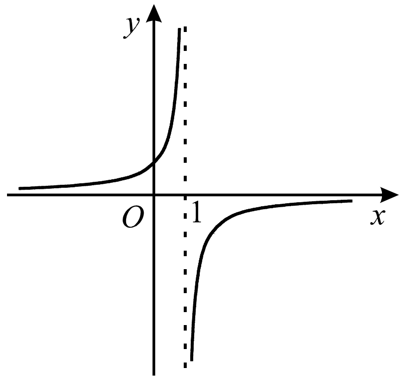
3. De duas funções, f e g, sabe-se que:

• o gráfico de f é uma recta, cuja ordenada na origem é igual a 2;

• o gráfico de g é uma hipérbole.

Nas figuras seguintes estão representadas parte dessa recta e parte dessa hipérbole.



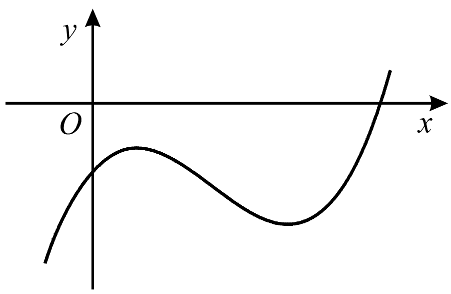


A recta de equação $x = 1$ é assimptota do gráfico de g

Indique o valor de $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

(A) 0 **(B)** 2 **(C)** $+\infty$ **(D)** $-\infty$

4. Na figura abaixo está parte do gráfico de uma função h, de domínio $\mathbb{R}$.



Sejam h' e h'' a primeira e a segunda derivadas de h, respectivamente.
Admita que estas duas funções também têm domínio $\mathbb{R}$.
Qual das expressões seguintes designa um número positivo?

(A) $h(0) + h''(0)$ **(B)** $h(0) - h'(0)$

(C) $h'(0) - h''(0)$ **(D)** $h'(0) \times h''(0)$

5. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	a	a	$0{,}4$

(a designa um número real).

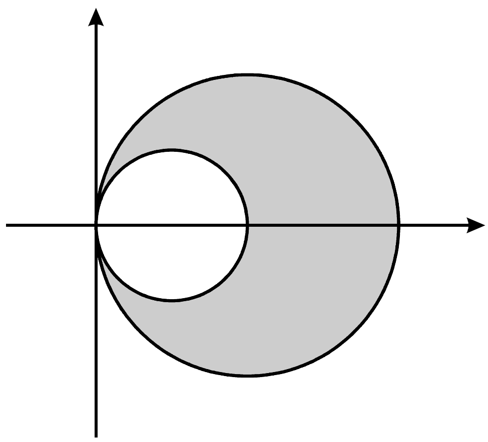
Qual é o valor médio desta variável aleatória ?

(A) $1{,}1$ **(B)** $1{,}2$ **(C)** $1{,}3$ **(D)** $1{,}4$

6. Quatro raparigas e quatro rapazes entram num autocarro, no qual existem seis lugares sentados, ainda não ocupados.
De quantas maneiras diferentes podem ficar ocupados esses seis lugares, supondo que ficam dois rapazes em pé?

(A) $3\,560$ **(B)** $3\,840$ **(C)** $4\,180$ **(D)** $4\,320$

7. Na figura estão representadas, no plano complexo, duas circunferências, ambas com centro no eixo real, tendo uma delas raio 1 e a outra raio 2.



A origem do referencial é o único ponto comum às duas circunferências.

Qual das condições seguintes define a região sombreada, incluindo a fronteira?

(A) $|z-1| \geq 1 \;\wedge\; |z-2| \leq 2$ **(B)** $|z-1| \geq 2 \;\wedge\; |z-2| \leq 1$

(C) $|z-1| \leq 1 \;\wedge\; |z-2| \geq 2$ **(D)** $|z-1| \leq 2 \;\wedge\; |z-2| \geq 1$

Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

1.1. Considere $z_1 = (2 - i)\left(2 + cis\frac{\pi}{2}\right)$ e $z_2 = \frac{1}{5}\,cis\left(-\frac{\pi}{7}\right)$

Sem recorrer à calculadora, escreva o número complexo $\frac{z_1}{z_2}$ na forma trigonométrica.

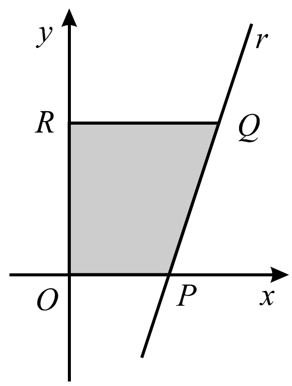
1.2. Seja z um número complexo cuja imagem geométrica, no plano complexo, é um ponto A situado no primeiro quadrante.
Seja B a imagem geométrica de $\overline{z}$, conjugado de z.
Seja O a origem do referencial.
Sabe-se que o triângulo $[AOB]$ é equilátero e tem perímetro 6.
Represente o triângulo $[AOB]$ e determine z na forma algébrica.

2. Seja f a função, de domínio $]1, +\infty[$, definida por $f(x) = x + x\ln(x-1)$.
Sem recorrer à calculadora, resolva as duas alíneas seguintes:

2.1. Estude a função quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.

2.2. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy, uma recta r e um trapézio $[OPQR]$.

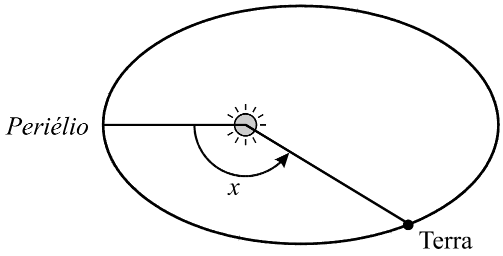
- Q tem abcissa 2 e pertence ao gráfico de f (o qual não está representado na figura);
- r é tangente ao gráfico de f no ponto Q;
- P é o ponto de intersecção da recta r com o eixo Ox;
- R pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à do ponto Q.



Determine a área do trapézio $[OPQR]$. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3. Como sabe, a Terra descreve uma órbita elíptica em torno do Sol.

Na figura está representado um esquema dessa órbita. Está assinalado o *periélio*, o ponto da órbita da Terra mais próximo do Sol.



Na figura está assinalado um ângulo de amplitude x radianos $(x \in [0, 2\pi[)$.
Este ângulo tem o seu vértice no Sol, o seu lado origem passa no *periélio* e o seu lado extremidade passa na Terra.

A distância d, em milhões de quilómetros, da Terra ao Sol, é (aproximadamente) dada, em função de x, por $d = 149{,}6\,(1 - 0{,}0167\,\cos x)$

3.1. **Sem recorrer à calculadora**, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, determine a distância máxima e a distância mínima da Terra ao Sol. Apresente os valores pedidos em milhões de quilómetros, arredondados às décimas.

3.2. Sabe-se que x verifica a relação $\frac{2\pi t}{T} = x - 0{,}0167\,\operatorname{sen} x$, em que

- t é o tempo, em dias, que decorre desde a passagem da Terra pelo *periélio* até ao instante em que atinge a posição correspondente ao ângulo x;
- T é o tempo que a Terra demora a descrever uma órbita completa ($365{,}24$ dias).

3.2.1. Mostre que, para $x = \pi$, se tem $t = \frac{T}{2}$.

Interprete este resultado no contexto da situação descrita.

3.2.2. Sabe-se que a última passagem da Terra pelo *periélio* ocorreu a uma certa hora do dia 4 de Janeiro. Determine a distância a que a Terra se encontrava do Sol, à mesma hora do dia 14 de Fevereiro. Apresente o resultado em milhões de quilómetros, arredondado às décimas. Nos valores intermédios, utilize, no mínimo, quatro casas decimais.

Nota: a resolução desta questão envolve uma equação que deve ser resolvida graficamente, com recurso à calculadora; apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de algum, ou de alguns, ponto(s).

4. Seja $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0) = f(2) = 0$ e $f(1) > 0$
Prove que existe pelo menos um número real c no intervalo $]0, 1[$ tal que $f(c) = f(c + 1)$

Sugestão: considere a função $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) - f(x + 1)$

5. Numa sala de Tempos Livres, a distribuição dos alunos por idades e sexo é a seguinte:

	5 anos	6 anos	7 anos
Rapaz	1	5	2
Rapariga	3	5	7

5.1. Escolhem-se dois alunos ao acaso.
Qual é a probabilidade de a soma das suas idades ser igual a 12? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

5.2. Escolhe-se um aluno ao acaso.
Sejam A e B os acontecimentos:

A: «*o aluno tem 7 anos*»;

B: «*o aluno é rapaz*».

Indique, justificando, o valor da probabilidade condicionada $P(B|A)$. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Nota: no caso de utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, explicite os valores das duas probabilidades envolvidas nessa fórmula.

6. Uma turma de 12.º ano é constituída por raparigas, umas de 16 anos e as restantes de 17 anos, e por rapazes, uns de 17 anos e os restantes de 18 anos.
Os alunos dessa turma estão numerados consecutivamente, a partir do número 1.
Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa turma e regista-se o número, a idade e o sexo desse aluno.
Em cada uma das opções seguintes estão indicados dois acontecimentos, X e Y, associados a esta experiência aleatória.

Opção 1: X : «O aluno escolhido tem idade superior ou igual a 17 anos»
Y : «O aluno escolhido tem 16 ou 17 anos»

Opção 2: X : «O número do aluno escolhido é par»
Y : «O número do aluno escolhido é múltiplo de 4»

Opção 3: X : «O aluno escolhido tem 18 anos»
Y : «O aluno escolhido é rapariga»

Opção 4: X : «O aluno escolhido é rapaz»
Y : «O aluno escolhido tem 17 anos»

Em apenas uma das opções acima apresentadas os acontecimentos X e Y são tais que são verdadeiras as três afirmações seguintes:

$$P(X \cup Y) > P(X), \quad P(X \cup Y) < 1 \quad \text{e} \quad P(X \cap Y) > 0$$

Qual é essa opção? Numa pequena composição, explique por que é que rejeita as outras três opções (para cada uma delas, indique, **justificando**, qual é a afirmação falsa).

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa 9
Cada resposta errada.. 0
Cada questão não respondida ou anulada 0

Grupo II **137**

1. 21
  1.1. 12
  1.2. 9

2. 28
  2.1. 14
  2.2. 14

3. 42
  3.1. 14
  3.2. 28
    3.2.1. 14
    3.2.2. 14

4. 14

5. 18
  5.1. 9
  5.2. 9

6. 14

TOTAL **200**