

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO
12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais
 Programa novo implementado em 2005/2006

Duração da prova: 120 minutos
 2006

2.ª FASE

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I	63
Cada resposta certa	9
Cada resposta errada.....	0
Cada questão não respondida ou anulada	0
 Grupo II	 137
1.	21
1.1.	12
1.2.	9
2.	28
2.1.	14
2.2.	14
3.	42
3.1.	14
3.2.	28
3.2.1.	14
3.2.2.	14
4.	14
5.	18
5.1.	9
5.2.	9
6.	14
 TOTAL	 200

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anulados todos os itens com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todos os itens em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	A	D	A	C	A	D	A
Versão 2	B	C	A	B	D	D	C

Grupo II

Critérios gerais

1. Se o examinando se enganar na identificação do item a que está a responder, ou se a omitir, mas, pela resolução apresentada, for possível identificá-lo inequivocamente, a resposta deve ser vista e classificada.
2. Se o examinando apresentar mais do que uma resposta a um item, e não indicar, de forma inequívoca, a que pretende que seja classificada, deve ser vista e classificada apenas a que se encontra em primeiro lugar, na folha de resposta.
3. As cotações a atribuir às respostas dos examinandos são expressas obrigatoriamente em números inteiros.
4. Num item em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, a cotação a atribuir deve estar de acordo com o seguinte critério:
 - Se o examinando se limitar a apresentar o resultado final, a cotação deve ser de 0 (zero) pontos.
 - Se o examinando não se limitar a apresentar o resultado final, a cotação deve ser a soma algébrica das cotações atribuídas a cada etapa, de acordo com o disposto nos pontos 6, 7, 8 e 9 destes critérios gerais, e das desvalorizações previstas nos pontos 10 e 11 destes critérios gerais. Se a soma for negativa, a cotação a atribuir é de 0 (zero) pontos.
5. Alguns itens da prova podem ser correctamente resolvidos por mais do que um processo. Sempre que o examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nos critérios específicos, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas. Salienta-se que deve ser aceite qualquer processo cientificamente correcto, mesmo que envolva conhecimentos não contemplados no programa da disciplina.

6. A cotação de cada item está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para o resolver.
- 6.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.
- 6.2. O classificador não pode subdividir, em cotações parcelares, a cotação atribuída a cada etapa.
Caso uma etapa envolva um único passo, testando apenas o conhecimento de um só conceito ou propriedade, e a sua resolução não esteja completamente correcta, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos.
Caso uma etapa envolva mais do que um passo (por exemplo, o cálculo da derivada de uma função, a resolução de uma equação, a obtenção de uma expressão em função de uma variável, etc.) e a sua resolução esteja incompleta, ou contenha incorrecções, a cotação a atribuir deve estar de acordo com o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
- erros de contas ocasionais devem ser desvalorizados em um ponto;
 - erros que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades devem ser desvalorizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa;
 - transposições erradas de dados do enunciado devem ser desvalorizadas em um ponto, desde que o grau de dificuldade da etapa não diminua;
 - transposições erradas de dados do enunciado devem ser desvalorizadas em, pelo menos, metade da cotação da etapa, caso o grau de dificuldade da etapa diminua.
- 6.3. Nas etapas cuja cotação se encontra discriminada por níveis de desempenho, o classificador deve enquadrar a resposta do examinando numa das descrições apresentadas. O classificador não pode atribuir uma cotação diferente das indicadas.
- 6.4. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.
- 6.5. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.
- 6.6. Pode acontecer que o examinando, ao resolver um item, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios específicos. Todas as etapas não percorridas explicitamente pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam inequivocamente implícitos na resolução do item, devem receber a cotação indicada.
7. Quando, num item, é pedida uma forma específica de apresentação do resultado final (por exemplo, «em minutos», «em percentagem», etc.), este deve ser apresentado na forma pedida. Se o resultado final apresentado pelo examinando não respeitar a forma pedida no enunciado (por exemplo, se o enunciado pedir o resultado em minutos, e o examinando o apresentar em horas), devem ser atribuídos 0 (zero) pontos à etapa correspondente ao resultado final. No entanto, a cotação não deve ser desvalorizada caso o examinando não indique a unidade em que é pedido o resultado (por exemplo, se o resultado final for 12 minutos, ou 12 metros, e o examinando escrever simplesmente 12, não se deve aplicar nenhuma desvalorização). Se não for pedida aproximação para o resultado final, o examinando deve apresentar o valor exacto. Se o examinando apresentar, como resultado final, uma aproximação do valor exacto, deve ser aplicada uma desvalorização de 1 ponto na cotação a atribuir à etapa correspondente ao resultado final.

8. O examinando deve respeitar sempre a instrução relativa à apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações. Se, numa etapa, o examinando não respeitar esta instrução, apresentando algo (valor, quadro, tabela, gráfico, etc.) que não resulte de trabalho anterior, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos a essa etapa. Todas as etapas subsequentes que dela dependam devem ser igualmente cotadas com 0 (zero) pontos.

9. O examinando deve respeitar sempre qualquer instrução relativa ao método a utilizar na resolução de um item (por exemplo, «sem recorrer à calculadora», «equacione o problema», «resolva graficamente», etc.). Na resolução apresentada pelo examinando, deve ser inequívoco, pela apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações, o cumprimento da instrução. Se tal não acontecer, considera-se que o examinando não respeitou a instrução. A etapa em que se dá o desrespeito e todas as subsequentes que dela dependam devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.

10. Se, na resolução de um item, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), a cotação total a atribuir ao item deve ser desvalorizada em um ponto. Esta desvalorização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas cotadas com 0 (zero) pontos, nem a eventuais utilizações do símbolo de igualdade, onde, em rigor, deveria estar o símbolo de igualdade aproximada.

11. Existem itens em cujo enunciado é dada uma instrução relativa ao número mínimo de casas decimais que o examinando deve conservar sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos. Indicam-se, a seguir, as desvalorizações a aplicar, na cotação total a atribuir ao item, em caso de desrespeito dessa instrução e/ou de arredondamentos mal efectuados.

Todos os valores intermédios estão de acordo com a instrução, mas existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado..... -1 ponto

Todos os valores intermédios estão bem arredondados, mas existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução..... -1 ponto

Existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado e existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução -2 pontos

Critérios específicos

1.1. 12

Escrever z_1 na forma algébrica 6

$\text{cis } \frac{\pi}{2} = i$ 2

Restantes cálculos 4

Calcular $\frac{z_1}{z_2}$ 6

Escrever z_1 na forma trigonométrica2

Efectuar a divisão na forma trigonométrica4

1.2. 9

Representar o triângulo $[AOB]$ no plano complexo (**ver nota 1**) 3

Escrever z na forma $x + yi$ 6

$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{x}{2}$ 3

$z = \sqrt{3} + i$ (**ver nota 2**) 3

ou

Aplicar o Teorema de Pitágoras para concluir que $x = \sqrt{3}$ 3

$z = \sqrt{3} + i$ (**ver nota 2**) 3

ou

$z = 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}$ 4

$z = \sqrt{3} + i$ (**ver nota 2**) 2

Notas:

1. A cotação desta etapa deve ser atribuída de acordo com o seguinte critério:

Representação correcta 3

Triângulo $[OAB]$ com
 • o vértice A no primeiro quadrante,
 • o vértice B no quarto quadrante,
 • A e B simétricos relativamente ao eixo real,
 mas onde \overline{AB} é manifestamente diferente de \overline{OA} e
 de \overline{OB} , e não existe qualquer referência à igualdade
 dos lados 2

Triângulo $[OAB]$ com
 • o vértice A no primeiro quadrante,
 • o vértice B no quarto quadrante,
 mas onde A e B não são simétricos relativamente ao
 eixo real, e não existe qualquer referência que evidencie
 a simetria 1

Outras situações 0

2. Se o examinando apresentar a parte real de z na forma de um valor aproximado, em vez do valor exacto $\sqrt{3}$, a cotação a atribuir a esta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

2.1. 14

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ 3

Concluir que a recta de equação $x = 1$ é assíntota do gráfico de f 3

Referir que, pelo facto de f ser contínua em todo o seu domínio, o seu gráfico não tem mais assíntotas verticais 3

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ 3

$\frac{f(x)}{x} = 1 + \ln(x - 1)$ 2

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [1 + \ln(x - 1)] = +\infty$ 1

Concluir que não existem assíntotas não verticais do gráfico de f 2

Nota:

Se o examinando tentar verificar a existência de assíntotas não verticais quando $x \rightarrow -\infty$, a cotação a atribuir a esta questão deve ser desvalorizada em 2 pontos. Se, em consequência desta desvalorização, a cotação resultar negativa, deve ser convertida em 0 (zero) pontos.

2.2. 14

$f'(x) = 1 + \ln(x - 1) + x \times \frac{1}{x - 1}$ (ver nota 1) 4

Determinar $f'(2)$ 1

Determinar $f(2)$ 1

Escrever uma equação da recta r 2

Determinar a abcissa do ponto P 3

Determinar a área do trapézio (ver nota 2) 3

Notas:

1. Se o examinando evidenciar a intenção de determinar $f'(x)$, a cotação mínima a atribuir a esta etapa deverá ser de 1 ponto.
2. Se o examinando não apresentar o resultado na forma de fracção irredutível, a cotação a atribuir a esta etapa deve ser desvalorizada em 1 ponto.

3.1. 14

- Concluir que π é maximizante de d (**ver nota**).....3
- Determinar a distância máxima (152,1)4
- Concluir que 0 é minimizante de d (**ver nota**)3
- Determinar a distância mínima (147,1)..... 4

ou

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ 3
- $0,0167 \geq -0,0167 \cos x \geq -0,0167$ 3
- $1,0167 \geq 1 - 0,0167 \cos x \geq 0,9833$ 3
- $152,1 \geq 149,6(1 - 0,0167 \cos x) \geq 147,1$ 3
- Conclusão2

Nota:

Não se exige que o examinando utilize a relação entre zeros/sinal da derivada e extremos/monotonia da função. O examinando pode obter o maximizante e o minimizante por observação directa da figura do enunciado.

3.2.1. 14

Mostrar que, para $x = \pi$, se tem $t = \frac{T}{2}$ 8

Substituir x por π 1

Obter a igualdade $\frac{2\pi t}{T} = \pi$ 3

Mostrar que $\frac{2\pi t}{T} = \pi \Leftrightarrow t = \frac{T}{2}$ 4

Interpretar o resultado 6

A cotação a atribuir deve estar de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Interpretação correcta (exemplo: «O tempo que decorre entre a passagem da Terra pelo periélio e o instante em que a Terra atinge o ponto mais afastado da sua órbita, relativamente ao Sol, é metade do tempo que a Terra demora a descrever uma órbita completa.») 6

Interpretação mal redigida, mas onde existe evidência de o examinando ter compreendido a situação (exemplos: «Quando o $x = \pi$, demora-se metade dos dias a fazer uma volta completa de órbita.»; «Quando $x = \pi$ percorre-se metade da distância, demorando-se metade do tempo.») 3

Outras situações (exemplo: «O tempo para se chegar ao periélio é metade do tempo que demora a alcançar o Sol.») 0

3.2.2. 14

Determinar o número de dias que decorrem entre 4 de Janeiro e 14 de Fevereiro (**ver nota 1**) 2

Escrever a equação $\frac{2\pi \times 41}{365,24} = x - 0,0167 \sin x$ 3

Resolver a equação 6
 Explicação do método utilizado (**ver nota 2**)..... 3
 Valor de x (**ver nota 3**).....3

Determinar a distância pedida3
 Substituir x pelo valor encontrado, na expressão
 $149,6 (1 - 0,0167 \cos x)$ 2
 Resultado correctamente arredondado1

Notas:

1. A cotação desta etapa deve ser atribuída de acordo com o seguinte critério:
 - Número de dias correcto (41)2
 - Número de dias igual a 40 ou a 42 1
 - Outras situações0

2. A cotação desta etapa deve ser atribuída de acordo com o seguinte critério:
 - Apresentação do gráfico da função definida por $x - 0,0167 \sin x$, com respeito pelo domínio desta função, $[0, 2\pi[$, e da recta de equação $y = \frac{2\pi \times 41}{365,24}$, bem como do ponto de intersecção e respectiva abcissa
 (ou apresentação do gráfico da função definida por $x - 0,0167 \sin x - \frac{2\pi \times 41}{365,24}$ e respectivo zero)3
 - Apresentação dos gráficos com ausência de alguns elementos (por exemplo, ausência da abcissa do ponto de intersecção) e/ou com algumas incorrecções (por exemplo, o gráfico da função não respeita o seu domínio) 1 ou 2
 - Outras situações0

3. A cotação a atribuir à solução da equação deve ser atribuída de acordo com o seguinte critério:
 - Solução no intervalo $[0,7162; 0,7163]$ 3
 - Solução não pertencente ao intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[0,71; 0,72]$ 2
 - Solução não pertencente ao intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[0,70; 0,73]$ 1
 - Outras situações0

A demonstração envolve os seguintes pontos:

- referir a continuidade de g
- justificar correctamente que $g(0) < 0$ ($g(0) = -f(1)$ e $f(1) > 0$)
- justificar correctamente que $g(1) > 0$ ($g(1) = f(1)$ e $f(1) > 0$)
- evocar o Teorema de Bolzano para concluir que $\exists c \in]0, 1[: g(c) = 0$
- referir que $g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = f(c + 1)$

A cotação a atribuir deve estar de acordo com o seguinte critério:

O examinando explicita os cinco pontos de uma forma clara e encadeada, demonstrando assim o pretendido	14
O examinando explicita os cinco pontos, mas não o faz de uma forma clara e encadeada	10
O examinando explicita quatro pontos	8
O examinando explicita três pontos	6
O examinando explicita dois pontos	4
O examinando explicita um ponto	2

5.1. 9

Expressão que dá a probabilidade (ver notas 1 e 2)..... 8

Resultado na forma de fracção irredutível (ver nota 3)..... 1

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva cotação a atribuir. As respostas apresentadas têm todas a forma de fracção. O examinando pode, no entanto, apresentar expressões equivalentes na forma de um produto de fracções.

1.º caso: Fracções com denominador ${}^{23}C_2$ e com numerador igual a:

$4 \times 9 + {}^{10}C_2$ (ou equivalente)	8
$10 \times 9 + 4 \times 9$ (ou equivalente)	6
4×9 (ou equivalente)	4
${}^{10}C_2$ (ou equivalente)	4
${}^{13}C_2 + {}^{10}C_2$ (ou equivalente)	4
Outras situações	2

2.º caso: Fracções com denominador 23×22 e numerador igual a:

$2 \times 4 \times 9 + {}^{10}A_2$ (ou equivalente)	8
$4 \times 9 + 10 \times 9$ (ou equivalente)	6
$4 \times 9 \times 2$ (ou equivalente)	4
${}^{10}A_2$ (ou equivalente)	4
4×9 (ou equivalente)	3
Outras situações	2

3.º caso: Fracções com denominador 23^2 e numerador igual a:

$2 \times 4 \times 9 + 10^2$ (ou equivalente)	2
Outras situações	0

4.º caso: Fracções com outros denominadores

0

2. Se o examinando indicar apenas o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.

3. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido cotada com 0 (zero) pontos.

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo:

Referir que existem 9 alunos com sete anos, dos quais 2 são rapazes7

Concluir que a probabilidade pedida é $\frac{2}{9}$ 2

2.º Processo:

Referir que $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$ (ver nota 1) 2

Concluir que $P(B|A) = \frac{\frac{2}{23}}{\frac{9}{23}}$ (ver nota 2) 6

Concluir que a probabilidade pedida é $\frac{2}{9}$ 1

Notas:

1. Se a fórmula apresentada pelo examinando estiver incorrecta, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos à totalidade da resposta a este item.
2. Se o examinando, desrespeitando a instrução do enunciado, não explicitar os valores de $P(B \cap A)$ e de $P(A)$, ou seja, se escrever $\frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{2}{9}$, a cotação a atribuir a esta etapa deve ser desvalorizada em 3 pontos.

Explicar a rejeição das opções 1, 2 e 3 (**ver notas 1 e 2**) 12

Concluir que a opção 4 é a correcta (**ver nota 3**) 2

Notas:

1. Para cada uma das três opções que o examinando deve rejeitar, a cotação a atribuir deve estar de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

O examinando identifica a afirmação falsa, explica correctamente a razão pela qual a afirmação é falsa, utilizando sempre uma linguagem matematicamente correcta 4

O examinando identifica a afirmação falsa, explica correctamente a razão pela qual a afirmação é falsa, mas nem sempre utiliza uma linguagem matematicamente correcta 3

O examinando identifica a afirmação falsa, mas não explica correctamente a razão pela qual a afirmação é falsa 2

O examinando não identifica a afirmação falsa 0

2. Para cada uma das três opções, indica-se o mínimo que se aceita como justificação correcta da falsidade da afirmação em causa.

Opção 1: A afirmação $P(X \cup Y) < 1$ é falsa porque, como todos os alunos têm idade superior ou igual a 16 anos, $X \cup Y$ é um acontecimento certo.

Opção 2: A afirmação $P(X \cup Y) > P(X)$ é falsa porque, como todos os números múltiplos de 4 são pares, $X \cup Y = X$.

Opção 3: A afirmação $P(X \cap Y) > 0$ é falsa porque, como não existem raparigas com 18 anos, $X \cap Y = \emptyset$.

3. A cotação relativa a esta etapa só deve ser atribuída se tiverem sido cotadas, com pelo menos 2 pontos, cada uma das três rejeições (da etapa anterior) **ou** se o examinando justificar convenientemente porque é que as três afirmações são verdadeiras, na opção 4.