Resoluções

Grupo I

Questões de resposta de escolha múltipla

1. Sendo $f(x)=a^x+b$, tem-se $\begin{cases} f(0)=2 \\ f(1)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+b=2 \\ a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=2 \end{cases}$

Resposta: **A**

2. $\overline{AC}=sen\alpha$ **;** $\overline{CB}=1-\cos\alpha$ **;** comprimento do arco BA = α

Então, o perímetro da região sombreada é $\alpha+sen\alpha+1-\cos\alpha=1+\alpha+sen\alpha-\cos\alpha$

Resposta: **D**

3. Como $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ é um número real e $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=-\infty$, conclui-se que $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}=0$

Resposta: **A**

4. Atendendo ao ponto de intersecção do gráfico com o eixo das ordenadas, à monotonia da função, e às concavidades, conclui-se que $h(0)<0$**,** $h'(0)>0$ e $h''(0)<0$, deduz-se que $h'(0)-h''(0)>0$.

Resposta: **C**

5. Tem-se $2a+0,4=1 \Leftrightarrow a=0,3$. Então $\mu=0,3\times 0+0,3\times 1+0,4\times 2=1,1$

Resposta: **A**

6. O número de maneiras de, dos quatro rapazes escolher os dois que ficam de pé é ${}^4C_2$.
Então, o número pedido é ${}^4C_2\times 6!=4320$

Resposta: **D**

7. A região sombreada é definida pelos pontos que pertencem ao exterior da circunferência centrada em $(1,0)$ e raio 1 e ao interior da circunferência centrada em $(2,0)$ e raio 2.

Resposta: **A**

Grupo II

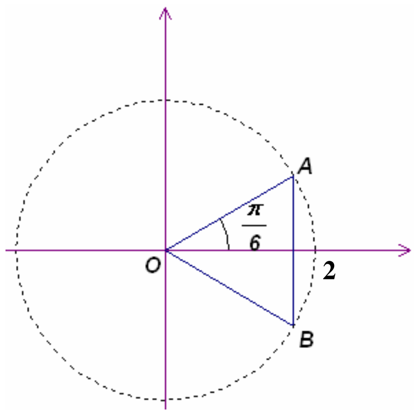
Questões de resposta aberta

1.1 Sendo $z_1 = (2-i)\left(2+cis\frac{\pi}{2}\right)$ e $z_2 = \frac{1}{5}cis\left(-\frac{\pi}{7}\right)$, tem-se:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2-i)\left(2+cis\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{1}{5}cis\left(-\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{(2-i)(2+i)}{\frac{1}{5}cis\left(-\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{4-i^2}{\frac{1}{5}cis\left(-\frac{\pi}{7}\right)} = \frac{5cis0}{\frac{1}{5}cis\left(-\frac{\pi}{7}\right)} = 25cis\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

Então, $\frac{z_1}{z_2} = 25cis\left(\frac{\pi}{7}\right)$

1.2 Se o perímetro do triângulo $[AOB]$ é 6, então $\overline{OA} = 2$.



Então $z = 2cis\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow z = 2\left(cos\frac{\pi}{6} + i.sen\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$

$$z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \Leftrightarrow z = \sqrt{3} + i$$

A representação de z na forma algébrica é $\sqrt{3} + i$.

2.1 Como se trata de uma função contínua em todo o seu domínio, se existir assimptota vertical, apenas poderá ser a recta de equação $x = 1$.
Analise-se essa possibilidade:

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x + x\ln(x-1) = -\infty$. A recta de equação $x = 1$ **é** uma assimptota do gráfico de *f*.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + x\ln(x-1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[1 + \ln(x-1)\right] = +\infty.$$

O gráfico de *f* não tem assimptotas não verticais. A única assimptota que admite é a recta de equação $x = 1$.

2.2 A ordenada de Q é $f(2)=2$. Sabe-se que o declive de r é $f'(2)$.

Tem-se $f'(x)=1+\ln(x-1)+\dfrac{x}{x-1}$. Então, $f'(2)=3$

Então a equação da recta r é do tipo $y=3x+b$. Como $Q(2,2)$ pertence à recta , tem-se:

$2=3\times 2+b \Leftrightarrow -4=b$. Logo, r é representada por $y=3x-4$.

$\begin{cases} y=3x-4 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{3} \\ y=0 \end{cases}$. Então , tem-se $P\left(\dfrac{4}{3},0\right)$ e $R(0,2)$

A área A do trapézio é dada por $A=\dfrac{2+\dfrac{4}{3}}{2}\times 2 = \dfrac{10}{3}$. O valor da área é $\dfrac{10}{3}$.

3.1 A distância da Terra ao Sol é mínima quando esta se situa no Periélio, isto é, para $x=0$.

$$d(0)=140,6(1-0,0167\cos 0)\simeq 147,1$$

A distância da Terra ao Sol é máxima para $x=\pi$

$$d(\pi)=140,6(1-0,0167\cos\pi)\simeq 152,1$$

A distância mínima da Terra ao Sol é de 147,1 milhões de quilómetros e a distância máxima é de 152,1 milhões de quilómetros.

3.2.1 Sendo $\dfrac{2\pi t}{T}=x-0,0167\,sen x$, considerando $x=\pi$, tem-se:

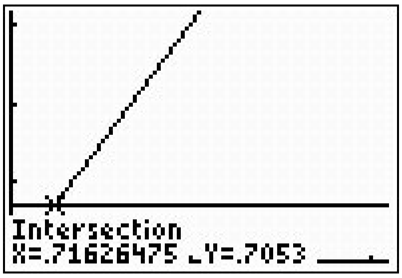
$$\frac{2\pi t}{T}=\pi-0,0167\,sen\pi \Leftrightarrow 2\pi t=T\pi \Leftrightarrow t=\frac{T\pi}{2\pi} \Leftrightarrow t=\frac{T}{2}$$

Deste resultado se deduz que o tempo que decorre desde a passagem da Terra pelo periélio até ao ponto em que está mais afastada do Sol, é metade do tempo que demora a descrever uma órbita completa.

3.2.2 De 4 de Janeiro a 14 de Fevereiro decorrem 41 dias. Sendo $T = 365,24$,tem-se:

$$\frac{2\pi \times 41}{365,24} = x - 0,0167 senx \quad \Leftrightarrow \quad 0,7053 = x - 0,0167 senx$$

Procedendo à resolução gráfica desta equação, considerem-se as funções $y_1 = x - 0,0167 senx$ e $y_2 = 0,7053$ para $x \in [0, 2\pi[$ e determine-se o ponto de intersecção dos seus gráficos.



$x \simeq 0,7163$

Para o valor de x encontrado, determina-se a distância *d* correspondente.

$d(0,7163) = 140,6(1 - 0,0167 \cos 0,7163) \simeq 147,7$

A distância da Terra ao Sol nesse dia era de 147,7 milhões de quilómetros.

4. Seja $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) - f(x+1)$

Atendendo à continuidade de *f* em $[0,2]$, pode-se concluir que *g* é contínua no seu domínio $[0,1]$.

$g(0) = f(0) - f(1) = -f(1)$. Como $f(1) > 0$, então $g(0) < 0$

$g(1) = f(1) - f(2) = f(1)$, logo $g(1) > 0$.

Como $g(0) < 0 < g(1)$, pelo Teorema de Bolzano conclui-se que $\exists c \in]0,1[: g(c) = 0$, oque equivale a dizer que $\exists c \in]0,1[: f(c) = f(c+1)$

5.1 Seja p a probabilidade pedida.

O número de casos possíveis é dado por $^{23}C_2$

Para que a soma das idades dos dois alunos escolhidos ser 12, os alunos devem ter ambos 6 anos ou um 7 e o outro 5 anos.

Assim, o número de casos favoráveis é $^{10}C_2 + 9 \times 4$.

Então, $p = \dfrac{^{10}C_2 + 9 \times 4}{^{23}C_2} = \dfrac{81}{253}$

5.2 Sendo $P(B|A)$ a probabilidade de escolher um rapaz sabendo que foi escolhido um aluno com 7 anos, pode-se considerar que:

- número de casos possíveis = 9 (número de alunos de 7 anos)
- número de casos favoráveis = 2 (número de rapazes de 7 anos)

$$P(B|A) = \frac{2}{9}$$

6. Na opção 4 são verdadeiras as três afirmações.

No que se refere à opção 1, falha a afirmação $P(X \cup Y) < 1$, uma vez que $X \cup Y$ corresponde à totalidade dos alunos da turma. Note-se que todos os alunos têm idade não inferior a 16 anos, pelo que $P(X \cup Y) = 1$.

Relativamente à opção2, a afirmação falsa é $P(X \cup Y) > P(X)$, uma vez que $Y \subset X$.

Note-se que os múltiplos de 4 são pares, pelo que $P(X \cup Y) = P(X)$.

Na opção 3, não se verifica $P(X \cap Y) > 0$, uma vez que não há raparigas de 18 anos no grupo, sendo $X \cap Y = \{ \ \}$.