PROVA 635/9 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)

Cursos Gerais

Programa novo implementado em 2005/2006

Duração da prova: 120 minutos
2006

DATA ESPECIAL - Fase 1
(Decreto-Lei n.º 123/96)

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Grupo I

- Os sete itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Para cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma letra, o item será anulado, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. De uma função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que a sua segunda derivada é dada por $f''(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 5)(x + 6)^2$

Quantos pontos de inflexão tem o gráfico de f ?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4

2. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{2x} & se \quad x < 0 \\ 2 & se \quad x = 0 \\ \frac{2x+1}{x} & se \quad x > 0 \end{cases}$$

Relativamente à continuidade da função g, no ponto 0, qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) É contínua.

(B) É contínua à esquerda e descontínua à direita.

(C) É contínua à direita e descontínua à esquerda.

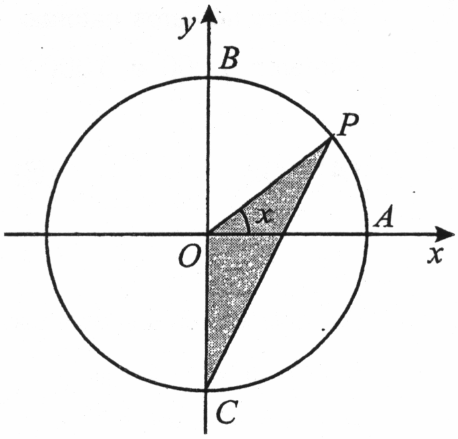
(D) É descontínua à esquerda e à direita.

3. Na figura junta, está representado o círculo trigonométrico.

Os pontos A, B e C têm coordenadas $(1,0)$, $(0,1)$ e $(0,-1)$, respectivamente.

O ponto P desloca-se ao longo do arco AB, nunca coincidindo com o ponto B.

Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude do ângulo AOP, e seja $f(x)$ a área do triângulo $[OPC]$.



Qual das expressões seguintes define a função f ?

(A) $\frac{\text{sen } x}{2}$

(B) $\frac{\cos x}{2}$

(C) $\frac{\text{sen } x + \cos x}{2}$

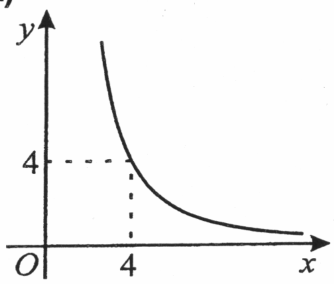
(D) $\frac{\text{sen } x \, . \cos x}{2}$

4. Pretende-se construir um prisma quadrangular regular com $64\ cm^3$ de volume.

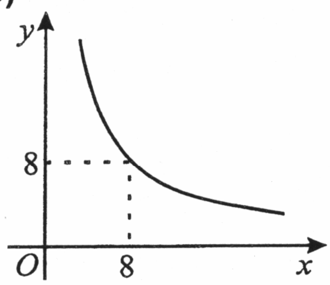
A altura y do prisma, medida em cm, depende do comprimento x da aresta da base, medido igualmente em cm.

Qual dos gráficos seguintes traduz correctamente a relação entre estas duas variáveis?

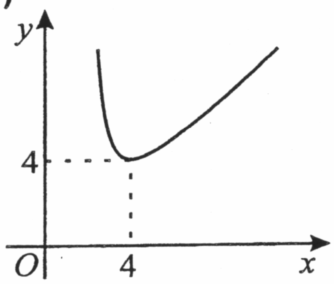
(A)



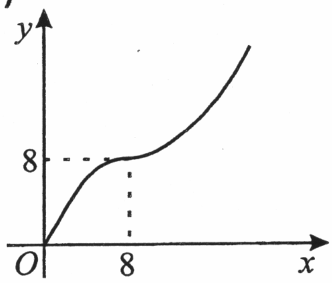
(B)



(C)



(D)



5. Quantos números naturais, escritos com algarismos todos diferentes, existem entre os números $1\,000$ e $3\,000$?

(A) 992 **(B)** 998 **(C)** 1002 **(D)** 1008

6. Um dos termos do desenvolvimento de $(x+2)^5$ é um monómio da forma $k\,x^3$, sendo k um número natural.

Qual é o valor de k ?

(A) 20 **(B)** 30 **(C)** 40 **(D)** 50

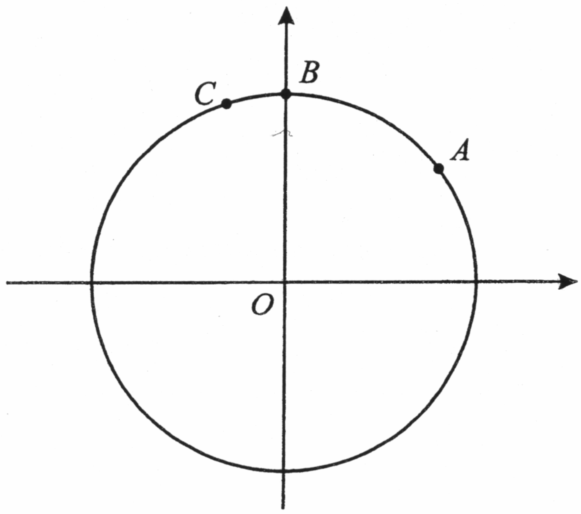
7. Na figura está representada, no plano complexo, uma circunferência centrada na origem do referencial.

Os pontos A, B e C pertencem a essa circunferência.

O ponto A é a imagem geométrica de $4+3\,i$.

O ponto B pertence ao eixo imaginário.

O arco BC tem 18 graus de amplitude.



Em cada uma das quatro alternativas que se seguem, está escrito um número complexo na forma trigonométrica (os argumentos estão expressos em radianos).

Qual deles tem por imagem geométrica o ponto C ?

(A) $7\,cis\,\frac{2\pi}{3}$ **(B)** $7\,cis\,\frac{3\pi}{5}$

(C) $5\,cis\,\frac{2\pi}{3}$ **(D)** $5\,cis\,\frac{3\pi}{5}$

Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

1.1. Considere a equação $i\,z^3 - \sqrt{3} - i = 0$
Uma das soluções desta equação tem a sua imagem geométrica no terceiro quadrante do plano complexo.
Sem recorrer à calculadora, determine essa solução, escrevendo-a na forma trigonométrica.

1.2. Seja B a região do plano complexo definida pela condição

$$|z| \leq 2 \quad \wedge \quad Re(z) \geq 0 \quad \wedge \quad |z-1| \leq |z-i|$$

Represente graficamente B e determine a sua área.

2. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln x} & se \;\; 0 < x < 1 \\ x\,e^{2-x} & se \;\; x \geq 1 \end{cases}$

2.1. **Sem recorrer à calculadora**, resolva as três alíneas seguintes:

2.1.1. Estude a função f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.

2.1.2. Mostre que $\exists\, x \in \,]4\,,5[\; : \; f(x) + f(e^{-1}) = 0$

2.1.3. Estude a função f quanto à monotonia, no intervalo $]0\,,1[$.

2.2. Seja r a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2.
Seja s a recta que passa na origem do referencial e é paralela à recta r.
A recta s intersecta o gráfico de f num ponto.
Utilizando a sua calculadora, determine as coordenadas desse ponto. Apresente os valores arredondados às centésimas. Explique como procedeu, apresentando o gráfico, ou gráficos, obtido(s) na calculadora.

3. Considere a expressão $f(x) = A + B\cos(Cx)$. Sempre que se atribuem valores reais positivos a A, B e C, obtemos uma função de domínio $\mathbb{R}$.

3.1. Prove que $\frac{2\pi}{C}$ é período de qualquer função definida por uma expressão do tipo indicado.

3.2. Num certo rio, existe um ancoradouro para atracagem de barcos. A distância do ancoradouro ao fundo do rio varia com a maré.

Admita que, num certo dia, a distância do ancoradouro ao fundo do rio, x horas depois das zero horas desse dia, pode ser modelada por uma função do tipo $f(x) = A + B\cos(Cx)$, com $x \in [0, 24[$.

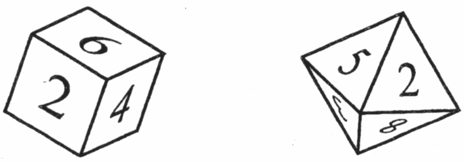
Admita ainda que, no intervalo de tempo $[0, 24[$:

- a distância máxima do ancoradouro ao fundo do rio é de 17 metros, e a mínima é de 11 metros;
- ocorrem apenas duas marés altas, uma às 0 horas e outra às 12 horas;
- ocorrem apenas duas marés baixas, uma às 6 horas e outra às 18 horas.

Justifique que, no modelo $f(x) = A + B\cos(Cx)$, se tem $C = \frac{\pi}{6}$ (tenha em conta a alínea 3.1 e o facto de que não existe nenhum período positivo inferior a $\frac{2\pi}{C}$).

Em seguida, determine os valores de A e B (positivos) adequados ao modelo.

4. A Sofia tem dois dados equilibrados.
Um dos dados é um cubo com as faces numeradas de 1 a 6.
O outro dado é um octaedro com as faces numeradas de 1 a 8.



A Sofia lança os dois dados e observa os números saídos (nas faces que ficam voltadas para cima).

4.1. No âmbito desta experiência, dê um exemplo de dois acontecimentos, A e B, nem impossíveis, nem certos, e tais que $A \neq B$ e $P(A \cap B) = P(A)$.

4.2. Seja X a variável aleatória: *soma dos números saídos*.
Determine $P(X = 5)$. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4.3. Considere os acontecimentos:
C: o produto dos números saídos é 16.
D: os números saídos são iguais.

Sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, indique o valor de $P(C|D)$ e de $P(D|C)$. Numa pequena composição, justifique a sua resposta, começando por explicar o significado das probabilidades pedidas, no contexto da situação descrita.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I **63**

Cada resposta certa 9
Cada resposta errada.. 0
Cada questão não respondida ou anulada 0

Grupo II **137**

1. 21
- **1.1.** 11
- **1.2.** 10

2. 56
- **2.1.** 42
  - **2.1.1.** 14
  - **2.1.2.** 14
  - **2.1.3.** 14
- **2.2.** 14

3. 28
- **3.1.** 14
- **3.2.** 14

4. 32
- **4.1.** 10
- **4.2.** 10
- **4.3.** 12

TOTAL **200**