EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade

(Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto — Programas novos e Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)

Duração da prova: 150 minutos **1.ª FASE**

2007

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA A / MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão da prova.

A ausência desta indicação implica a anulação de todos os itens de escolha múltipla.

Identifique claramente os grupos e os itens a que responde.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta (excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações).

É interdito o uso de «esferográfica-lápis» e de corrector.

As cotações da prova encontram-se na página 11.

A prova inclui um formulário na página 3.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ $\quad (\alpha$ *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*$)$

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\, maior \times Diagonal\, menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\, maior + Base\, menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ $(\alpha$ *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*$)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r$ *– raio da base*; g *– geratriz*$)$

Área de uma superfície esférica: $4\, \pi\, r^2$
$(r$ *– raio*$)$

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\, \pi\, r^3$ $\qquad (r$ *– raio*$)$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\, (n\, \theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\, \frac{\theta + 2\, k\, \pi}{n}\ ,\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u' .\, v + u \,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' .\, v - u \,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \,.\, u^{n-1} \,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' .\, \cos u$

$(\cos u)' = -\, u' .\, \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' .\, e^u$

$(a^u)' = u' .\, a^u .\, \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \,.\, \ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$$

Grupo I

- Os sete itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada item.
- Se apresentar mais do que uma letra, a resposta será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.

1. Identifique o valor de $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{4-x^2}$

(A) 0 **(B)** 1

(C) $+\infty$ **(D)** $-\infty$

2. Sabendo que:

$\ln(x) - \ln(e^{\frac{1}{3}}) > 0$ ($\ln$ designa logaritmo na base e),

um valor possível para x é:

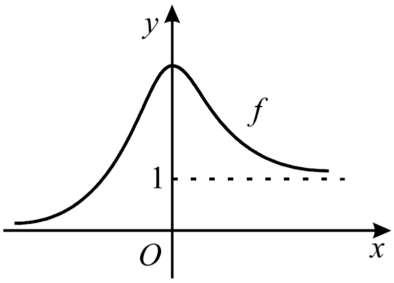
(A) 0

(B) -1

(C) 1

(D) 2

3. Na figura está parte da representação gráfica de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$.



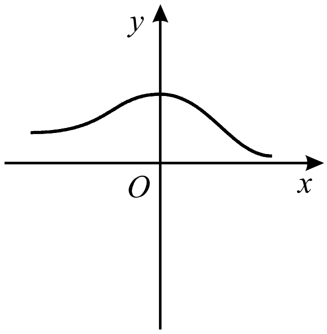
Tal como a figura sugere, o eixo Ox e a recta de equação $y = 1$ são assimptotas do gráfico de f.

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \ln[f(x)]$

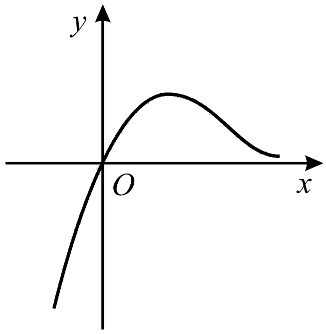
Numa das opções seguintes está parte da representação gráfica da função g.

Em qual delas?

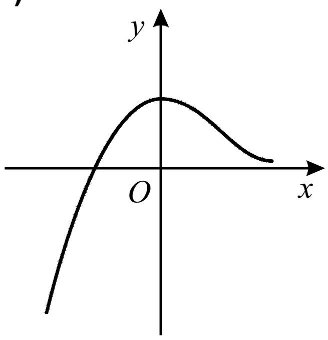
(A)



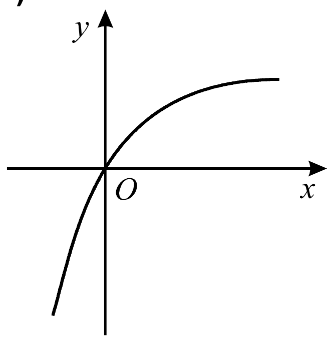
(B)



(C)



(D)



4. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.

Sabe-se que 3 é um zero da função f.

Seja g a função definida por $g(x) = f(x-1) + 4$, para qualquer número real x.

Qual dos seguintes pontos pertence garantidamente ao gráfico da função g ?

(A) $(2,4)$ **(B)** $(4,4)$ **(C)** $(4,8)$ **(D)** $(1,7)$

5. Escolhem-se, ao acaso, dois vértices diferentes de um paralelepípedo rectângulo.

Qual é a probabilidade de que esses dois vértices sejam extremos de uma aresta?

(A) $\frac{12}{{}^{8}C_{2}}$ **(B)** $\frac{12}{8^{2}}$ **(C)** $\frac{8}{{}^{8}C_{2}}$ **(D)** $\frac{8}{{}^{8}A_{2}}$

6. As cinco letras da palavra TIMOR foram pintadas, cada uma em sua bola.

As cinco bolas, indistinguíveis ao tacto, foram introduzidas num saco.

Extraem-se, aleatoriamente, as bolas do saco, sem reposição, e colocam-se em fila, da esquerda para a direita.

Qual é a probabilidade de que, no final do processo, fique formada a palavra TIMOR, sabendo-se que, ao fim da terceira extracção, estava formada a sucessão de letras TIM?

(A) 0 **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** 1

7. Qual das opções seguintes apresenta duas raízes quadradas de um mesmo número complexo?

(A) 1 e i **(B)** -1 e i

(C) $1-i$ e $1+i$ **(D)** $1-i$ e $-1+i$

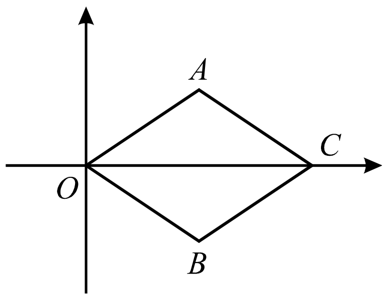
Grupo II

Nos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: Quando não é pedida a aproximação de um resultado, pretende-se sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \operatorname{cis} \alpha \quad \left(\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\right)$

1.1. Na figura está representado, no plano complexo, o paralelogramo $[AOBC]$



A e B são as imagens geométricas de z e $\overline{z}$, respectivamente.
C é a imagem geométrica de um número complexo, w.
Justifique que $w = 2 \cos \alpha$

1.2. Determine o valor de $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ para o qual $\frac{z^3}{i}$ é um número real.

2. Considere todos os números de três algarismos que se podem formar com os algarismos
$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9.

2.1. Escolhe-se, ao acaso, um desses números.

Sejam os acontecimentos:
A : «O número escolhido é múltiplo de 5»;
B : «O número escolhido tem os algarismos todos diferentes».

Averigúe se A e B são, ou não, acontecimentos independentes.

2.2. Considere o seguinte problema:

De entre todos os números de três algarismos diferentes que se podem formar com os algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ *e* 9*, em quantos deles o produto dos seus algarismos é um número par?*
Uma resposta correcta a este problema é: ${}^{9}A_3 - {}^{5}A_3$.

Numa pequena composição explique porquê.

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A, B e C três acontecimentos $(A \subset \Omega,\ B \subset \Omega$ e $C \subset \Omega)$ tais que $(A \cup B) \cap C = \emptyset$.

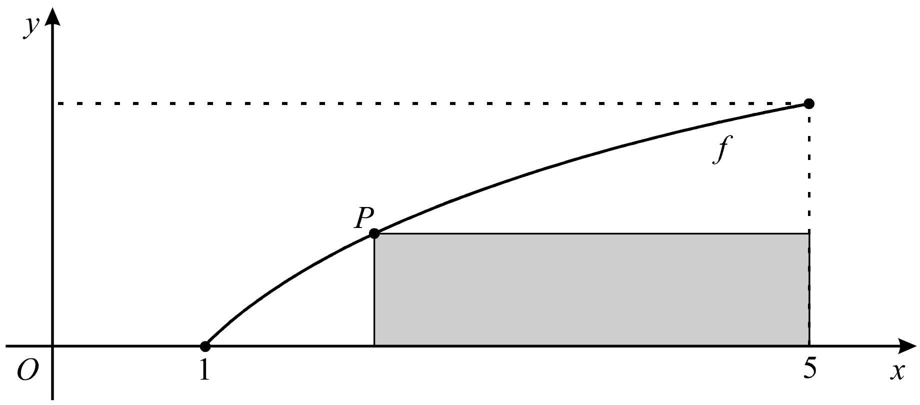
Sabe-se que $P(A) = 0{,}21$ e que $P(C) = 0{,}47$.

Calcule $P(A \cup C)$, utilizando as propriedades das operações com conjuntos e a axiomática das probabilidades.

4. Seja f a função, de domínio $[1, 5]$, definida por $f(x) = \ln x$

($\ln$ designa logaritmo na base e)

Na figura está representado, em referencial ortonormado xOy, o gráfico da função f.



Considere que um ponto P se desloca ao longo do gráfico de f. Para cada posição do ponto P, considere o rectângulo em que um dos lados está contido no eixo Ox, outro na recta de equação $x = 5$ e os outros dois nas rectas vertical e horizontal que passam pelo ponto P.

Exprima a área do rectângulo em função da abcissa de P, e, recorrendo à calculadora gráfica, determine a abcissa de P (aproximada às centésimas) para a qual a área do rectângulo é máxima. Apresente os elementos recolhidos na utilização da calculadora:

– o gráfico obtido;

– o ponto de ordenada máxima e respectivas coordenadas.

5. Considere as funções f e g, definidas em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = e^{\,x-1} \quad \text{e} \quad g(x) = \operatorname{sen} x$$

Considere ainda a função h, definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = f\,'(x) - g'(x)$

Sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva os dois itens seguintes:

5.1. Mostre que a função h tem, pelo menos, um zero no intervalo $\left]0,\ \frac{\pi}{2}\right[$

5.2. Tendo em conta **5.1.**, justifique que existe $a \in \left]0,\ \frac{\pi}{2}\right[$ tal que as rectas tangentes aos gráficos de f e g, nos pontos de abcissa a, são paralelas.

6. Admita que a intensidade da luz solar, x metros abaixo da superfície da água, é dada, numa certa unidade de medida, por

$$I(x) = a\,e^{-b\,x} \qquad (\,x \geq 0\,)$$

a e b são constantes positivas que dependem do instante e do local onde é efectuada a medição.

Sempre que se atribui um valor a a e um valor a b, obtemos uma função de domínio $\mathbb{R}_0^+$.

6.1. Medições efectuadas, num certo instante e em determinado local do oceano Atlântico, mostraram que, a 20 metros de profundidade, a intensidade da luz solar era metade da sua intensidade à superfície da água.

Determine o valor de b para esse instante e local. Apresente o resultado arredondado às centésimas.

6.2. Considere agora $b = 0{,}05$ e $a = 10$.

Estude essa função quanto à monotonia e existência de assimptotas do seu gráfico.

Interprete os resultados obtidos no contexto da situação descrita.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I ....(7 x 9 pontos)............................ **63 pontos**

Cada resposta certa .... 9 pontos
Cada resposta errada... 0 pontos
Cada questão não respondida ou anulada .... 0 pontos

Grupo II ....**137 pontos**

1. .... 21 pontos

1.1. ....11 pontos

1.2. ....10 pontos

2. .... 22 pontos

2.1. ....10 pontos

2.2. ....12 pontos

3. .... 10 pontos

4. .... 18 pontos

5. .... 34 pontos

5.1. ....16 pontos

5.2. ....18 pontos

6. .... 32 pontos

6.1. ....16 pontos

6.2. ....16 pontos

TOTAL .... **200 pontos**