Resoluções

Grupo I

Questões de resposta de escolha múltipla

1.

x	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$4-x^2$	-	0	+	0	-

Quando $x \to 2^+$ verifica-se que $4-x^2 \to 0^-$. Então $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{4-x^2} = -\infty$

Resposta: **D**

2. $\ln(x) - \ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > e^{\frac{1}{3}}$

Resposta: **D**

3. Sendo $g(x) = \ln[f(x)]$, quando $x \to +\infty$, verifica-se que $f(x) \to 1$, o que significa que $g(x) \to 0$.

Quando $x \to -\infty$, verifica-se que $f(x) \to 0^+$, o que significa que $g(x) \to -\infty$.

Como $f(0) > 1$, então $g(0) > 0$. A representação gráfica coerente com estas conclusões é a C.

Resposta: **C**

4. $g(4) = f(3) + 4 \quad \Leftrightarrow \quad g(4) = 4$

Resposta: **B**

5. nº de casos possíveis: ${}^{8}C_2$

Nº de casos favoráveis: 12

$$p = \frac{12}{{}^{12}C_2}$$

Resposta: **A**

6. Para sair a letra O na extracção seguinte, a probabilidade é $\dfrac{1}{2}$.

Resposta: **C**

7. Verifica-se que $(1-i)^2 = (-1+i)^2 = -2i$

Resposta: **D**

Grupo II

Questões de resposta aberta

1.1 $z = cis(\alpha)$ e $\overline{z} = cis(-\alpha)$

Como $[AOBC]$ é um paralelogramo, tem-se $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$.

Sendo C a imagem geométrica de w, pode afirmar-se que $w = z + \overline{z}$.

$w = cis\alpha + cis(-\alpha) \Leftrightarrow w = cos\alpha + isen\alpha + cos(-\alpha) + isen(-\alpha) \Leftrightarrow$

$w = \cos\alpha + isen\alpha + \cos\alpha - isen\alpha \Leftrightarrow w = 2\cos\alpha$

1.2 $$\frac{z^3}{i} = \frac{(cis\alpha)^3}{cis\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{cis(3\alpha)}{cis\left(\frac{\pi}{2}\right)} = cis\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

Para $\frac{z^3}{i}$ ser um número real, $3\alpha - \frac{\pi}{2} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 3\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\alpha = \pi$.

2.1 Se A e B são independentes $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$P(A) = \frac{{}^9A'_2}{{}^9A'_3} = \frac{9^2}{9^3} = \frac{1}{9} \qquad P(B) = \frac{{}^9A_3}{{}^9A'_3} = \frac{9\times8\times7}{9^3} = \frac{56}{81}$$

$$P(A \cap B) = \frac{{}^8A_2 \times 1}{9^3} = \frac{8\times7}{9^3} = \frac{56}{729}$$

Verifica-se que $\frac{56}{729} = \frac{1}{9} \times \frac{56}{81}$, isto é , $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Conclui-se que A e B são independentes.

2.2 O número total de números de três algarismos diferentes que é possível formar é ${}^9A_3$.

Por outro lado, o produto de três algarismos é par quando, pelo menos um dos algarismos é par. Então, à totalidade dos números, retiram-se aqueles que são constituídos apenas por algarismos ímpares, que são ${}^5A_3$.

Obtém-se assim ${}^9A_3 - {}^5A_3$.

3. Se $(A \cup B) \cap C = \varnothing$, e atendendo a $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, conclui-se que C é incompatível com A e com B, isto é, $A \cap C = \varnothing$ e $B \cap C = \varnothing$.

Como A e C são incompatíveis, tem-se:

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) \iff P(A \cup C) = 0,21 + 0,47 \iff P(A \cup C) = 0,68$$

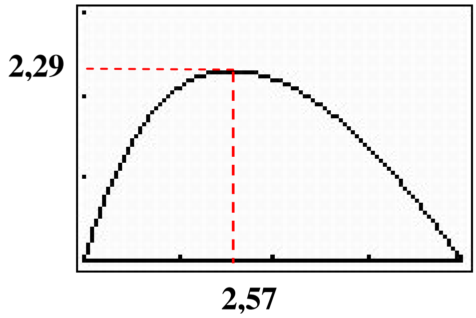
4. Sabe-se que $P(x, f(x))$.

$A(x)$ - área do rectângulo

$A(x) = (5 - x).\ln(x)$

Visualiza-se na calculadora uma representação gráfica da função A e identifica-se o ponto que corresponde à área máxima $(2,57\,;\,2,29)$

A área é máxima quando a abcissa do ponto P é $x \simeq 2,57$.



5.1 Tem-se $f'(x) = e^{x-1}$ e $g'(x) = \cos x$.

Então, $h(x) = e^{x-1} - \cos x$

Como f e g têm domínio $\mathbb{R}$ e são contínuas, bem como f' e g', então h é uma função contínua em $\mathbb{R}$, e portanto, em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Verifica-se que:

$h(0) = \frac{1}{e} - 1$ e $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2} - 1}$

$h(0) < 0$ e $h\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$

Como $h(0) < 0 < h\left(\frac{\pi}{2}\right)$, pelo Teorema de Bolzano se conclui que

$$\exists c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[: h(c) = 0$$

5.2 Da alínea anterior decorre a existência de, pelo menos um zero de h em $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, intervalo onde a função é diferenciável.

$$h(c)=0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(c)-g'(c)=0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(c)=g'(c)$$

Como $f'(c)$ e $g'(c)$ são os declives das rectas tangentes aos gráficos, respectivamente, de f e g no ponto de abcissa c, e são iguais, conclui-se que essas rectas são paralelas.

6.1 $I(20)=\frac{I(0)}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a.e^{-20b}=\frac{a}{2} \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad e^{-20b}=\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -20b=\ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad b=\frac{\ln 2}{20}$

Então, $b \simeq 0,03$

6.2 Se $b=0,05$ e $a=10$, tem-se $I(x)=10e^{-0,05x}, \quad x \geq 0$

$I'(x)=-0,5e^{-0,05x}$

$I'(x)<0, \quad \forall x \in [0,+\infty[$. Então, a função I é monótona decrescente.

Como a função I é contínua no seu domínio, sendo este $[0,+\infty[$ (intervalo fechado à esquerda), o seu gráfico não admite assimptotas verticais.
Atendendo ao domínio da função no contexto apresentado, apenas faz sentido estudar a possibilidade de existência de assimptota não vertical quando $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{I(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{10.e^{-0,05x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{10}{x.e^{0,05x}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} I(x) = \lim_{x\to+\infty} 10.e^{-0,05x} = 0$$

Então $y=0$ é uma assimptota horizontal do gráfico da função.

Dos resultados obtidos pode-se concluir que, à medida que a profundidade aumenta, a intensidade da luz solar diminui. Se a profundidade aumentar indefinidamente, a intensidade da luz tende para zero.