

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade

(Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto – Programas novos
e Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)

Duração da prova: 150 minutos
2007

2.ª FASE

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA A / MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Grupo I (7 x 9 pontos)..... **63 pontos**

Cada resposta certa 9 pontos
Cada resposta errada..... 0 pontos
Cada questão não respondida ou anulada 0 pontos

Grupo II **137 pontos**

1. 21 pontos
 1.1. 10 pontos
 1.2. 11 pontos

2. 10 pontos

3. 22 pontos
 3.1. 12 pontos
 3.2. 10 pontos

4. 18 pontos

5. 15 pontos

6. 34 pontos
 6.1. 16 pontos
 6.2. 18 pontos

7. 17 pontos

TOTAL **200 pontos**

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Deverão ser anulados todos os itens com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todos os itens em que o examinando dê mais do que uma resposta.

Grupo II

1. Se o examinando se enganar na identificação do item a que está a responder, ou se a omitir, mas, pela resolução apresentada, for possível identificá-lo inequivocamente, a resposta deve ser vista e classificada.
2. Se o examinando apresentar mais do que uma resposta a um item, e não indicar, de forma inequívoca, a que pretende que seja classificada, deve ser vista e classificada apenas a que se encontra em primeiro lugar, na folha de resposta.
3. As classificações a atribuir às respostas dos examinandos são expressas, obrigatoriamente, em números inteiros.
4. Num item em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, a classificação a atribuir à resposta deve estar de acordo com o seguinte critério:
 - Se o examinando se limitar a apresentar o resultado final, a cotação deve ser de zero pontos.
 - Se o examinando não se limitar a apresentar o resultado final, a classificação deve ser a soma algébrica das cotações atribuídas a cada etapa, de acordo com o disposto nos pontos 6, 7, 8, 9, 10 e 11 destes critérios gerais. Se a soma for negativa, a classificação a atribuir é de zero pontos.
5. Alguns itens da prova podem ser correctamente resolvidos por mais do que um processo. Sempre que o examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nos critérios específicos, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas. Salienta-se que deve ser aceite qualquer processo cientificamente correcto, mesmo que envolva conhecimentos não contemplados no programa da disciplina.

6. A cotação de cada item está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para o resolver.
- 6.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.
- 6.2. O classificador não pode subdividir, em cotações parcelares, a cotação atribuída a cada etapa.
Caso uma etapa envolva um único passo, testando apenas o conhecimento de um só conceito ou propriedade, e a sua resolução não esteja completamente correcta, deve ser atribuída a cotação de zero pontos.
Caso uma etapa envolva mais do que um passo (por exemplo, o cálculo da derivada de uma função, a resolução de uma equação, a obtenção de uma expressão em função de uma variável, etc.) e a sua resolução esteja incompleta, ou contenha incorrecções, a cotação a atribuir deve estar de acordo com o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:
- erros de contas ocasionais devem ser desvalorizados em um ponto;
 - erros que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades devem ser desvalorizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa;
 - transposições erradas de dados do enunciado devem ser desvalorizadas em um ponto, desde que o grau de dificuldade da etapa não diminua;
 - transposições erradas de dados do enunciado devem ser desvalorizadas em, pelo menos, metade da cotação da etapa, caso o grau de dificuldade da etapa diminua.
- 6.3. Nas etapas cuja cotação se encontra discriminada por níveis de desempenho, o classificador deve enquadrar a resposta do examinando numa das descrições apresentadas. O classificador não pode atribuir uma cotação diferente das indicadas.
- 6.4. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva classificação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.
- 6.5. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.
- 6.6. Pode acontecer que o examinando, ao resolver um item, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios específicos. Todas as etapas não percorridas explicitamente pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam inequivocamente implícitos na resolução do item, devem receber a cotação indicada.
7. Quando, num item, é pedida uma forma específica de apresentação do resultado final (por exemplo, «em minutos», «em percentagem», etc.), este deve ser apresentado na forma pedida. Se o resultado final apresentado pelo examinando não respeitar a forma pedida no enunciado (por exemplo, se o enunciado pedir o resultado em minutos, e o examinando o apresentar em horas), devem ser atribuídos zero pontos à etapa correspondente ao resultado final. No entanto, a cotação não deve ser desvalorizada caso o examinando não indique a unidade em que é pedido o resultado (por exemplo, se o resultado final for 12 minutos, ou 12 metros, e o examinando escrever simplesmente 12, não se deve aplicar nenhuma desvalorização). Se não for pedida aproximação para o resultado final, o examinando deve apresentar o valor exacto. Se o examinando apresentar, como resultado final, uma aproximação do valor exacto, deve ser aplicada uma desvalorização de 1 ponto na cotação a atribuir à etapa correspondente ao resultado final.

8. O examinando deve respeitar sempre a instrução relativa à apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações. Se, numa etapa, o examinando não respeitar esta instrução, apresentando algo (valor, quadro, tabela, gráfico, etc.) que não resulte de trabalho anterior, deve ser atribuída a cotação de zero pontos a essa etapa. Todas as etapas subsequentes que dela dependam devem ser igualmente classificadas com zero pontos.
9. O examinando deve respeitar sempre qualquer instrução relativa ao método a utilizar na resolução de um item (por exemplo, «sem recorrer à calculadora», «equacione o problema», «resolva graficamente», etc.). Na resolução apresentada pelo examinando, deve ser inequívoco, pela apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações, o cumprimento da instrução. Se tal não acontecer, considera-se que o examinando não respeitou a instrução. A etapa em que se dá o desrespeito e todas as subsequentes que dela dependam devem ser classificadas com zero pontos.
10. Se, na resolução de um item, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), a classificação total a atribuir à resposta deve ser desvalorizada em um ponto. Esta desvalorização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas classificadas com zero pontos, nem a eventuais utilizações do símbolo de igualdade, onde, em rigor, deveria estar o símbolo de igualdade aproximada.
11. Existem itens em cujo enunciado é dada uma instrução relativa ao número mínimo de casas decimais que o examinando deve conservar sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos. Indicam-se, a seguir, as desvalorizações a aplicar, na classificação total a atribuir à resposta, em caso de desrespeito dessa instrução e/ou de arredondamentos mal efectuados.

Todos os valores intermédios estão de acordo com a instrução, mas existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado..... -1 ponto

Todos os valores intermédios estão bem arredondados, mas existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução..... -1 ponto

Existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado e existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução -2 pontos

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

Grupo I

Cada resposta certa 9 pontos
 Cada resposta errada..... 0 pontos
 Cada questão não respondida ou anulada 0 pontos

As respostas correctas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	A	C	D	C	A	C	A
Versão 2	D	B	A	D	C	A	B

Grupo II

1.1. 10

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Identificar $\frac{\pi}{2}$ como um argumento de $4i$ (escrevendo, por exemplo, $4i = 4 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2}$)2

Concluir que $\frac{\pi}{2} + \alpha$ é um argumento de z_2 4

Concluir que $\operatorname{Arg}(-z_2) = \frac{3\pi}{2} + \alpha$ (**ver nota 1**)4

2.º Processo:

$-z_2 = -4i z_1$ 1

Identificar $\frac{3\pi}{2}$ como um argumento de $-4i$ (escrevendo, por exemplo, $-4i = 4 \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$) 5

Concluir que $\operatorname{Arg}(-z_2) = \frac{3\pi}{2} + \alpha$ (ver nota 1) 4

Notas:

1. Se a expressão apresentada pelo examinado para $\operatorname{Arg}(-z_2)$ for um argumento de $-z_2$ que não pertença a $[0, 2\pi[$ (por exemplo $\operatorname{Arg}(-z_2) = \alpha - \frac{\pi}{2}$), a classificação relativa a esta etapa deve sofrer uma desvalorização de 2 pontos.
2. Se o examinando se limitar a efectuar o produto de $4i$ por z_1 na forma algébrica, a cotação a atribuir à sua resposta deverá ser de zero pontos.

1.2. 11

Escrever $z_2 = 4i(3 + yi)$ 1

Concluir que $z_2 = -4y + 12i$ 4

Concluir que $y = 12$ 3

Escrever z_2 na forma algébrica ($z_2 = -48 + 12i$) 3

2. 10

Representando o acontecimento cuja probabilidade se quer calcular por

A , a resposta pode ser dada quer na forma $P(A) = \left(\frac{{}^4C_1 \times {}^4C_1}{{}^8C_2}\right)^2$

quer na forma $P(A) = \left(\frac{{}^4A_1 \times {}^4A_1 \times 2}{{}^8A_2}\right)^2$ (ver notas 1 e 2)..... 9

Apresentar o resultado na forma de fracção irredutível (ver nota 3)..... 1

Notas:

- Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, com a respectiva cotação a atribuir.

1.º caso: Fracções com denominador ${}^8C_2 \times {}^8C_2$ (ou equivalente) e com numerador igual a:

- $({}^4C_1 \times {}^4C_1)^2$ (ou equivalente) 9
- ${}^4C_1 \times {}^4C_1$ (ou equivalente) 5
- Outras situações 2

2.º caso: Fracções com denominador ${}^8A_2 \times {}^8A_2$ (ou equivalente) e com numerador igual a:

- $({}^4A_1 \times {}^4A_1 \times 2)^2$ (ou equivalente) 9
- $({}^4A_1 \times {}^4A_1)^2$ (ou equivalente) 6
- ${}^4A_1 \times {}^4A_1$ (ou equivalente) 3
- Outras situações 2

3.º caso: Fracções com denominador 8C_2 (ou equivalente) e com numerador igual a:

- ${}^4C_1 \times {}^4C_1$ (ou equivalente) 3
- Outras situações 0

4.º caso: Fracções com denominador 8A_2 (ou equivalente) e com numerador igual a:

- ${}^4A_1 \times {}^4A_1 \times 2$ (ou equivalente) 3
- Outras situações 0

5.º caso: Fracções com outros denominadores 0

- Se o examinando indicar apenas o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis, mas não escrever a fracção, deverá ser atribuído menos 1 ponto do que nas situações atrás referidas.
- A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido classificada com zero pontos.

3.1. 12

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Traduzir «probabilidade de que não ocorra X nem ocorra Y » por $P(\overline{X} \cap \overline{Y})$ 3

Aplicar as Leis de De Morgan 2

Aplicar a propriedade relativa à probabilidade do acontecimento contrário 2

Aplicar a propriedade relativa à probabilidade da união de dois acontecimentos..... 2

Aplicar a propriedade relativa à probabilidade da intersecção de dois acontecimentos independentes 2

Conclusão 1

2.º Processo:

Traduzir «probabilidade de que não ocorra X nem ocorra Y » por $P(\overline{X} \cap \overline{Y})$ 3

Referir que «se os acontecimentos X e Y são independentes, então \overline{X} e \overline{Y} também são» 3

Aplicar a propriedade relativa à probabilidade da intersecção de dois acontecimentos independentes 2

Aplicar a propriedade relativa à probabilidade do acontecimento contrário 2

Conclusão 2

3.2. 10

Expressão que dá a probabilidade pedida $\left(1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3}\right)$ (ver nota 1)..... 8

Apresentação do resultado na forma de fracção irredutível (ver nota 2)..... 2

Notas:

1. Se o examinando se limitar a escrever $a = \frac{1}{5}$ ($a = \frac{1}{3}$) e $b = \frac{1}{3}$ ($b = \frac{1}{5}$), a classificação a atribuir a esta etapa deverá ser de 4 pontos.
2. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a primeira etapa não tiver sido classificada com zero pontos.

4. 18

Apresentar o gráfico de g (ver nota 1) 6

Relacionar o sinal de g' com a monotonia de g 4

Indicar os valores de a e de b (ver nota 2) 8

Notas:

1. O desrespeito do domínio deve ser desvalorizado em 1 ponto.
2. A apresentação dos valores pedidos deve ser classificada de acordo com o seguinte critério:

Valor de a

1.º Caso (apresentação do resultado com duas casas decimais, de acordo com o enunciado):

Resposta $a \approx 1,36$ 4

Resposta $a \approx 1,35$ ou $a \approx 1,37$ 3

Resposta $a \approx 1,34$ ou $a \approx 1,38$ 1

Outros resultados 0

2.º Caso (apresentação do resultado com mais de duas casas decimais):

Valor de a no intervalo $[1,359; 1,361]$ 3

Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[1,358; 1,362]$ 1

Outros resultados 0

3.º Caso (apresentação do resultado arredondado às décimas):

Valor igual a $1,4$ 1

Outros resultados 0

4.º Caso (apresentação do resultado arredondado às unidades):

Qualquer resultado 0

Valor de b

1.º Caso (apresentação do resultado com duas casas decimais, de acordo com o enunciado):

Resposta $b \approx 4,61$	4
Resposta $b \approx 4,60$ ou $b \approx 4,62$	3
Resposta $b \approx 4,59$ ou $b \approx 4,63$	1
Outros resultados	0

2.º Caso (apresentação do resultado com mais de duas casas decimais):

Valor de b no intervalo $[4,610; 4,612]$	3
Valor fora do intervalo anterior, mas pertencente ao intervalo $[4,609; 4,613]$	1
Outros resultados	0

3.º Caso (apresentação do resultado arredondado às décimas):

Valor igual a $4,6$	1
Outros resultados	0

4.º Caso (apresentação do resultado arredondado às unidades):

Qualquer resultado	0
--------------------------	---

5. 15

Análise correcta da monotonia de h	3
Relação correcta entre a monotonia de h e o sinal de h'	3
Análise correcta do sentido das concavidades do gráfico de h	3
Relação correcta entre o sentido das concavidades do gráfico de h e o sinal de h''	3
Identificação correcta do gráfico de h' e do gráfico de h'' (figuras 3 e 2, respectivamente)	3

Nota:

Caso o examinando se limite a identificar o gráfico de h' e o gráfico de h'' , sem qualquer justificação, a cotação a atribuir à sua resposta deverá ser de zero pontos.

6.1. 16

Escrever a equação $f(x) = 0$ 4

Determinar analiticamente as soluções da equação $f(x) = 0$ 10

$$\begin{aligned}
 1 - \ln(x^2) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \ln(x^2) &= 1 \dots\dots\dots 1 \\
 \Leftrightarrow x^2 &= e \dots\dots\dots 5 \\
 \Leftrightarrow x &= \sqrt{e} \vee x = -\sqrt{e} \dots\dots\dots (2+2) 4
 \end{aligned}$$

Pontos pedidos: $(\sqrt{e}, 0), (-\sqrt{e}, 0)$ **(ver nota)**..... (1+1) 2

Nota:

Se, na etapa anterior, o examinando obtiver apenas uma solução, e, em consequência disso, a resposta apresentar apenas um par ordenado, a classificação a atribuir a esta etapa não deve sofrer qualquer desvalorização, pelo que deverá ser de 2 pontos.

6.2. 18

Cálculo da derivada de f 3

Concluir que f' não tem zeros 3

Estudo do sinal de f' 4

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0 \dots\dots\dots 2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \dots\dots\dots 2$$

Estudo da função f quanto à monotonia 4

Concluir que f é crescente em $] -\infty, 0[$ 2

Concluir que f é decrescente em $]0, +\infty[$ 2

Referir que f não tem extremos 4

7. 17

Escrever $a = \pi r^2$ e $A = \pi R^2$ (1+1) 2

Escrever $\pi r^2 = \pi R^2 \sqrt{\cos \theta}$ 3

Substituir R por $\sqrt[4]{2} r$ na igualdade anterior..... 4

Concluir que $\cos \theta = \frac{1}{2}$ 5

Indicar o valor de θ ($\theta = \frac{\pi}{3}$) 3