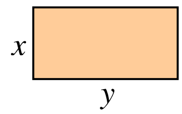
Resoluções

Grupo I

Questões de resposta de escolha múltipla

1. $xy = 5 \Leftrightarrow y = \dfrac{5}{x}$



O perímetro é representado por $2x + \dfrac{10}{x}$

Resposta: **A**

2. $-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq -2\cos x \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq 3 - 2\cos x \leq 5$

Então, $\quad 3 - 2\cos x = 5 \quad \wedge \quad x \in [0, 2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = -1 \quad \wedge \quad x \in [0, 2\pi] \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi$

Resposta: **C**

3. Por observação da representação gráfica conclui-se que:

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{f(x)} > 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 3^-} \frac{1}{f(x)} < 0 \quad .$$

Como $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{f(x)} \neq \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{f(x)}$, não existe $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{f(x)}$

Resposta: **D**

4. Como $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{g(x)} = 0$, então $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{g(x)} = 0$

Resposta: **C**

5. Se um cientista escolher um dos sete hotéis disponíveis, o outro só pode escolher esse mesmo hotel entre os sete possíveis $\left(\dfrac{1}{7}\right)$.

Resposta: **A**

6. Construindo uma tabela de dupla entrada, identificam-se três possibilidades de sair soma igual a 4.

Apenas uma delas corresponde a sair o mesmo número nos dois dados. Então a probabilidade é $\frac{1}{3}$.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	**4**	5	6	7
2	3	**4**	5	6	7	8
3	**4**	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Resposta: **C**

7. $i^{n+1} = i^n \times i = -i \times i = 1$

Resposta: **A**

GrupoII

Questões de resposta aberta

1.1 Seja $z_1 = 3 + yi$ e $z_2 = 4iz_1$. Sabe-se que $Arg(z_1) = \alpha$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Admita-se que $|z_1| = \rho$. Então, na forma trigonométrica , tem-se $z_1 = \rho cis\alpha$.

$$-z_2 = -4i.z_1 \Leftrightarrow z_2 = 4cis\left(\frac{3\pi}{2}\right).\rho cis\alpha \Leftrightarrow z_2 = 4\rho cis\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$$

Então, $Arg(-z_2) = \frac{3\pi}{2} + \alpha$

1.2 Tem-se: $z_2 = 4i.z_1 \Leftrightarrow z_2 = 4i.(3 + yi) \Leftrightarrow z_2 = -4y + 12i$

$\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2) \Leftrightarrow y = 12$.

Então, $z_2 = -48 + 12i$

2. Designe-se por A o acontecimento do qual se pretende obter a probabilidade.

Nº de casos possíveis = ${}^{8}A_2 \times {}^{8}A_2 = \left({}^{8}A_2\right)^2$

Nº de casos favoráveis = $\underbrace{{}^{4}A_1 \times {}^{4}A_1 \times 2}_{\text{Nº de maneiras de seleccionar sucessivamente um rei e um ás do grupo a que pertencem}} \times \underbrace{{}^{4}A_1 \times {}^{4}A_1 \times 2}_{\text{Nº de maneiras de seleccionar sucessivamente uma dama e um valete do grupo a que pertencem}} = \left({}^{4}A_1 \times {}^{4}A_1 \times 2\right)^2$

$$P(A) = \frac{\left({}^{4}A_1 \times {}^{4}A_1 \times 2\right)^2}{\left({}^{8}A_2\right)^2} = \frac{32^2}{56^2} = \frac{16}{49}$$

A probabilidade pedida é $\frac{16}{49}$.

3.1 Pretende-se que não ocorra X e não ocorra Y.
Sabe-se que $P(X \cap Y) = P(X) \times P(Y)$ uma vez que X e Y são independentes.

$P\left(\overline{X} \cap \overline{Y}\right) = P\left(\overline{X \cup Y}\right) = 1 - P(X \cup Y) =$

$= 1 - \left[P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)\right] = 1 - (a + b - a \times b) =$

$= 1 - a - b + a \times b$, como se pretendia demonstrar.

3.2 Considerem-se os acontecimentos:
X: "tirar um iogurte de pêssego";
Y: "tirar um sumo de laranja"

Sabe-se que $P(X) = \frac{1}{5}$ e $P(Y) = \frac{1}{3}$

Pelo resultado demonstrado na alínea anterior, tem-se:

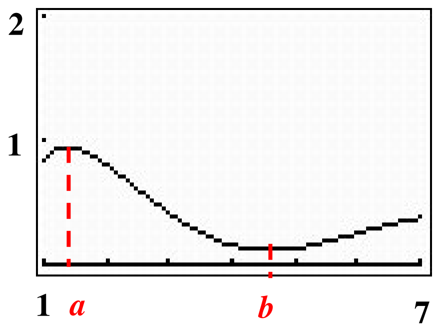
$P\left(\overline{X} \cap \overline{Y}\right) = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} \Leftrightarrow P\left(\overline{X} \cap \overline{Y}\right) = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P\left(\overline{X} \cap \overline{Y}\right) = \frac{15 - 3 - 5 + 1}{15} \Leftrightarrow P\left(\overline{X} \cap \overline{Y}\right) = \frac{8}{15}$

A probabilidade pedida é $\frac{8}{15}$.

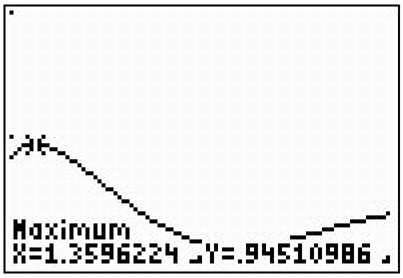
4. Considere-se $g(x)=\dfrac{senx+\ln x}{x}$ e $x\in\left]1,7\right[$

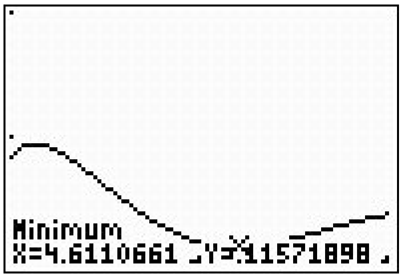
Na calculadora, pode visualizar-se o seguinte:



Os valores de x que satisfazem a condição $g'(x)<0$, correspondem aos valores do domínio para os quais a função é decrescente.

Observando o gráfico, identifica-se a como sendo a abcissa do ponto onde a função admite um máximo e b a abcissa do ponto onde admite um mínimo.





Tem-se $a\simeq 1{,}36$ e $b\simeq 4{,}61$.

5. Observando a representação gráfica de h, verifica-se que a função é decrescente desde 0 até a e de c em diante, admitindo um mínimo para $x=a$ e um máximo para $x=c$. Este comportamento traduz-se, na função h', como sendo negativa nos intervalos descritos, admitindo a e c como zeros. Como a função h é crescente de a a c, neste intervalo, h' é positiva. O gráfico com estas características é o da figura 3
Uma vez que h tem a concavidade voltada para cima em $\left]0,b\right[$, e voltada para baixo quando $x\in\left]b,+\infty\right[$ admitindo um inflexão para $x=b$, deduz-se que, no que se refere a h'', esta é positiva em $\left]0,b\right[$ e, a partir de b é negativa, sendo b um zero desta função. Estas características correspondem ao gráfico da figura 2.

6.1 As abcissas dos pontos de intersecção do gráfico de f com o eixo Ox, são os zeros desta função.

$$f(x)=0 \iff 1-\ln\left(x^2\right)=0 \iff \ln\left(x^2\right)=1 \iff x^2=e \iff$$
$$\iff x=\sqrt{e} \quad \vee \quad x=-\sqrt{e}$$

Os pontos de intersecção do gráfico de f com o eixo Ox $\left(-\sqrt{e},0\right)$ e $\left(\sqrt{e},0\right)$.

6.2 Como $f(x)=1-\ln\left(x^2\right)$, tem-se:

$$f'(x)=-\frac{2x}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad f'(x)=-\frac{2}{x}$$

A função f' não tem zeros.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	s.s.	-
$f(x)$	↗	s.s.	↘

A função é crescente em $]-\infty,0[$, decrescente em $]0,+\infty[$ e não admite extremos.

7. Sabe-se que as áreas A e a das secções respectivamente da artéria principal e da ramificação respeitam a relação:

$$a = A\sqrt{\cos\theta}$$

Se $R=\sqrt[4]{2}\,r$, então $a=\pi r^2$ e $A=\pi\sqrt{2}\,r^2$.

Da relação entre as áreas das secções resulta:

$$\pi\, r^2=\pi\sqrt{2}\,r^2\sqrt{\cos\theta} \quad \Leftrightarrow \quad 1=\sqrt{2}\,\sqrt{\cos\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{\cos\theta} \quad .$$

Ora, $\sqrt{\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta=\frac{1}{2}$.

$$\cos\theta=\frac{1}{2} \quad \wedge \quad \theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\quad \Leftrightarrow \quad \theta=\frac{\pi}{3}$$

Verificação: $\sqrt{\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ Verdadeira

Então , o valor de θ é de $\frac{\pi}{3}$ radianos.