Sociedade Portuguesa de Matemática
Av. da República 37, 4º, 1050–187 Lisboa
Tel. 21 795 1219 / Fax 21 795 2349
www.spm.pt imprensa@spm.pt

23 de Junho de 2008

Proposta de resolução da Sociedade Portuguesa de Matemática
Para a prova de Matemática A (código 635)
1ª. Fase – 23/06/08

Grupo 1

	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	B	C	C	D	B	C	B	B
Versão 2	C	B	B	A	C	B	C	C

Segunda Parte

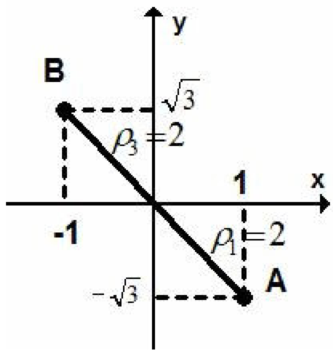
1.1 $-z_1 = -(1-\sqrt{3}i) = -1+\sqrt{3}i$ vamos passar este complexo para a forma trigonométrica.
Sendo ρ_1 o módulo de $-z_1$ e θ o argumento principal de $-z_1$

$\rho_1 = \sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$tg\theta = -\sqrt{3}$, como o complexo está no 2º quadrante $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$, logo $-z_1 = 2cis\frac{2}{3}\pi$.
Se $-z_1$ for raiz cúbica de z_2 , sabemos que $(-z_1)^3 = z_2$.

$$\left(2cis\frac{2\pi}{3}\right)^3 = 2^3 cis\left(3\frac{2\pi}{3}\right) = 2^3 cis2\pi = 8cis0 = z_2$$

1.2 $i^{46} = i^{44} \times i^2 = i^2 = -1$, $z_3 = -z_1$. Como z_3 é o simétrico de z_1 o comprimento do segmento AB é a soma dos módulos, ou seja $\overline{AB} = 2\rho_1 = 2\times 2 = 4$



2.1- Casos possíveis 10^3

Casos favoráveis $=3\text{x}9^2$ Probabilidade pedida$=\frac{3\times 9^2}{10^3} \approx 0{,}24$

2.2- C_3^{12} Número de maneiras de escolher 3 raparigas de um conjunto de 12.

C_2^{10} Número de maneiras de escolher 2 rapazes de um conjunto de 10.

C_3^{12} x C_2^{10} Número total de comissões formadas obrigatoriamente com 3 raparigas e 2 rapazes.

C_2^{11} Número de maneiras de escolher 2 raparigas de um conjunto de 11. Como a comissão tem que ter três raparigas a terceira que falta é a Ana.

9: Número de maneiras de escolher 1 rapaz de um conjunto de 9.
Como a comissão tem de ter 2 rapazes o segundo que falta é o Miguel.

C_2^{11} x9 Número total de comissões formadas com três raparigas e dois rapazes que incluem a Ana e o Miguel ao mesmo tempo.

C_3^{12} x C_2^{10} - C_2^{11} x9 Ao número total de comissões retiramos as que têm a Ana e o Miguel ao mesmo tempo.

3- Na caixa B estavam inicialmente 3 bolas verdes e 4 azuis.
Se, após termos colocado uma bola de A na caixa B, a probabilidade de retirar de B uma bola azul é $\frac{1}{2}$, então há neste momento tantas bolas azuis como verdes na caixa B.
Por isso, a bola retirada da caixa A e colocada na caixa B tem cor verde.

4- Vamos estudar as assimptotas verticais

A função é contínua em todo o seu domínio, excepto no ponto de abcissa x=0, pois os limites laterais neste ponto são diferentes:

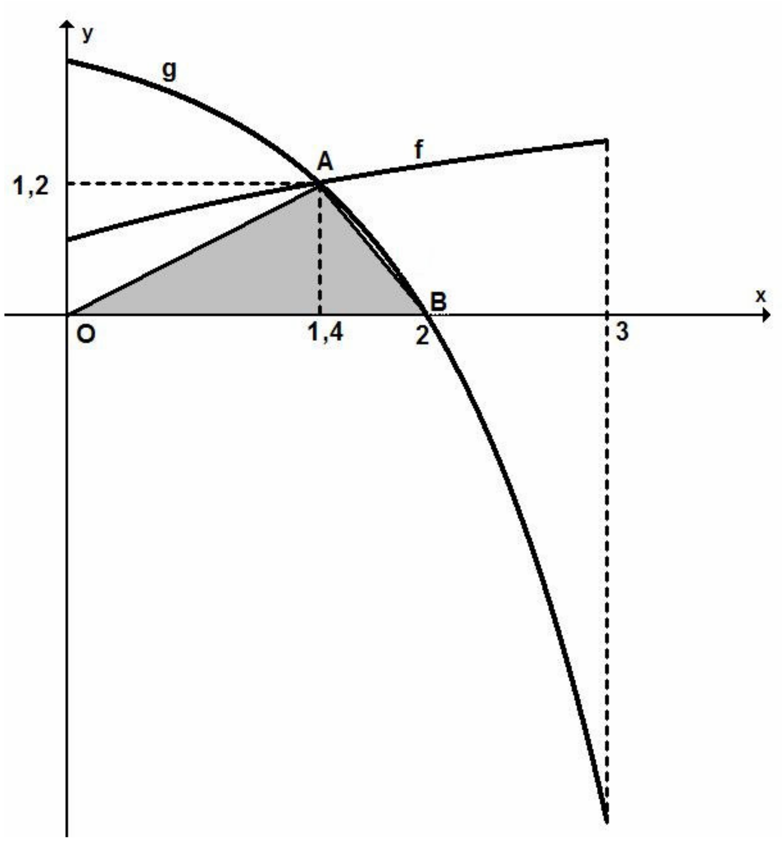
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-4x+1} = e$$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{3senx}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{3}{x} \times \lim_{x\to 0^-} \frac{senx}{x} = -\infty \times 1 = -\infty$, daqui conclui-se que a recta de equação $x=0$ é assimptota vertical do gráfico da função. Não existe mais nenhuma assimptota vertical pois a função é contínua em $\left[-\pi,+\infty\right[\setminus \{0\}$.

Para calcularmos a assimptota horizontal basta determinar o limite da função quando $x \to +\infty$, pois o domínio da função é $\left[-\pi,+\infty\right[$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} e^{-4x+1} = 0$, daqui conclui-se que a recta de equação $y=0$ é assimptota horizontal do gráfico da função.

5-



$$A_{[OAB]} \approx \frac{2\times 1{,}2}{2} = 1{,}2$$

6-

6.1-

$$h'(x) = (4 - x + \ln(x+1))' = -1 + \frac{1}{x+1}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{-x-1+1}{x+1} = \frac{-x}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \ em\,]-1,+\infty[$$

x	-1		0		$+\infty$
h'(x)	N.D	+	0	-	
h(x)	N.D	↗	4	↘	

A função é estritamente crescente em]-1,0] e estritamente decrescente em [0,+∞[. h(0)=4 é um máximo absoluto.

6.2 – A função h(x) é contínua em]-1, +∞ [,logo é contínua em [5 , 6] e estamos em condições de aplicar o Teorema de Bolzano

$$h(5) = 4 - 5 + \ln(6) = -1 + \ln(6) \approx 0.792$$

$$h(6) = 4 - 6 + \ln(7) = -2 + \ln(7) \approx -0.054$$

Como h(5) x h(6)<0, então, pelo Teorema de Bolzano, sabemos que

$$\exists x \in]5,6[: h(x) = 0$$

7 –

7.1

$$N(0) = \frac{2000}{1 + 199e^{-0,01 \times 0}} = 10$$

A Associação foi criada com 10 sócios.

$$\lim_{t \to +\infty} N(t) = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{2000}{1 + 199e^{-0,01 \times t}} \right) = \frac{2000}{1 + 0} = 2000$$

À medida que o tempo passa, o número de sócios aproxima-se de 2000.

7.2

$$N(t) = 1000 \Leftrightarrow \frac{2000}{1 + 199e^{-0,01 \times t}} = 1000 \Leftrightarrow \frac{2000}{1 + 199e^{-0,01 \times t}} - 1000 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2000 - 1000(1 + 199e^{-0,01 \times t})}{1 + 199e^{-0,01 \times t}} = 0 \Leftrightarrow 2 - (1 + 199e^{-0,01 \times t}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 199e^{-0,01 \times t} = 1 \Leftrightarrow e^{-0,01 \times t} = \frac{1}{199} \Leftrightarrow -0,01t = \ln\left(\frac{1}{199}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{1}{199}\right)}{-0,01} \approx 529,330$$

$N(529) \approx 998,348$

$N(530) \approx 1003,348$

Logo a inscrição do sócio número 1000 comemorou-se ao fim de 530 dias.