Proposta de resolução do exame de Matemática A de 12º ano
Cod 635
16 de Julho de 2009

Grupo I

Versão 1	
1.	D
2.	C
3.	C
4.	B
5.	C
6.	D
7.	C
8.	A

Versão 2	
1.	A
2.	B
3.	B
4.	C
5.	B
6.	A
7.	B
8.	D

Grupo II

1.

$$\begin{aligned} z &= \frac{\left(\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)^7 + (2+i)^3}{4\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)} \\ &= \frac{\operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{7}\right) + 2 + 11i}{-4i} \\ &= \frac{-1+2+11i}{-4i} \\ &= \frac{1+11i}{-4i} \times \frac{i}{i} \\ &= \frac{i+11i^2}{-4i^2} \\ &= -\frac{11}{4} + \frac{1}{4}i. \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar: pela fórmula do binómio de Newton,

$$(2+i)^3 = 2^3 + 3\times 2^2 i + 3\times 2i^2 + i^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i.$$

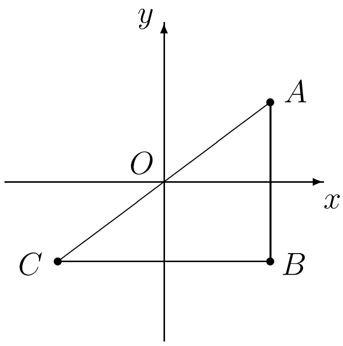
2. A é a imagem geométrica de w, A pertence ao primeiro quadrante.

Sendo B a imagem geométrica de $\bar{w}$ B pertence ao quarto quadrante. Sendo C a imagem geométrica de $(-w)$, C pertence ao terceiro quadrante.

Como $|w| = 5$, vem que

$$|\bar{w}| = |-w| = |w| = 5.$$

Se $w = a + bi$, então $\bar{w} = a - bi$ e $-w = -a - bi$. Assim A e B têm a mesma abcissa, e B e C têm a mesma ordenada, portanto a recta AB é vertical e a recta BC é horizontal. Assim o triângulo $[ABC]$ é rectângulo em B.



Temos que $\overline{AC} = |w| + |-w| = 2|w| = 10$. Pelo Teorema de Pitágoras, e sabendo que $\overline{AB} > 0$,

$$\begin{aligned} & \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ & \overline{AB}^2 = 36 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ & \overline{AB} = 6. \end{aligned}$$

Portanto

$$A_{\Delta[ABC]} = \frac{8 \times 6}{2} = 24 \text{ u.a.}$$

3. $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ e $P(B) \neq 0$.

$$\begin{aligned} 1 - P(A|B) \times P(B) - P(A \cap \bar{B}) &= \\ &= 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \times P(B) - P(A \cap \bar{B}) \\ &= 1 - P(A \cap B) - P(A \cap \bar{B}) \\ &= 1 - (P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}))\ (*) \\ &= 1 - P((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - P(A \cap (B \cup \bar{B})) \\
&= 1 - P(A \cap \Omega) \\
&= 1 - P(A) \\
&= P(\bar{A}), \qquad \text{c.q.d.}
\end{aligned}
$$

(*) Os conjuntos $A \cap B$ e $A \cap \bar{B}$ são disjuntos, pois $A \cap B \subset B$ e $A \cap \bar{B} \subset \bar{B}$.

4.

4.1. Esta pergunta está mal formulada, podendo levar a diversas interpretações.

i. Temos 5 cartas, retiradas de uma vez por todas do baralho, e queremos com elas fazer sequências, sem restrições ao modo como as sequências são feitas. Neste caso, a informação de que temos 2 ases e 3 figuras é irrelevante e a solução é $5! = 120$.

ii. Temos 5 cartas, retiradas de uma vez por todas do baralho, e queremos com elas fazer sequências, em que a primeira e a última carta são ases, e as restantes são figuras.

   (a) Se não tivermos 2 ases e 3 figuras, a resposta é zero.

   (b) Se as cinco cartas forem 2 ases e 3 figuras, então a resposta é $2 \times 3! = 12$.

iii. As cinco cartas não estão fixas à partida, e estamos à procura do número de maneiras possíveis de tirar 5 cartas de um baralho, em que a primeira e a última são ases, e as restantes são figuras. Nesse caso, a resposta é ${}^{4}A_2 \times {}^{12}A_3 = 15840$.

4.2. De acordo com a regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis, se estes forem todos equiprováveis. O número de casos possíveis é o número de maneiras de escolher 3 cartas de um total de 52, pelo que o número de casos possíveis é dado por ${}^{52}C_3$.

Uma destas cartas não pode ser um ás, existindo assim 48 possibilidades para essa carta; as outras duas terão de ser dois ases, existindo para isso ${}^{4}C_2$ possibilidades (de 4 ases escolhemos 2). Assim o número de casos favoráveis é dado por ${}^{4}C_2 \times 48$. Aplicando a regra de Laplace, temos o resultado.

5. $D_f = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \operatorname{sen}(2x)\cos x$.

5.1.

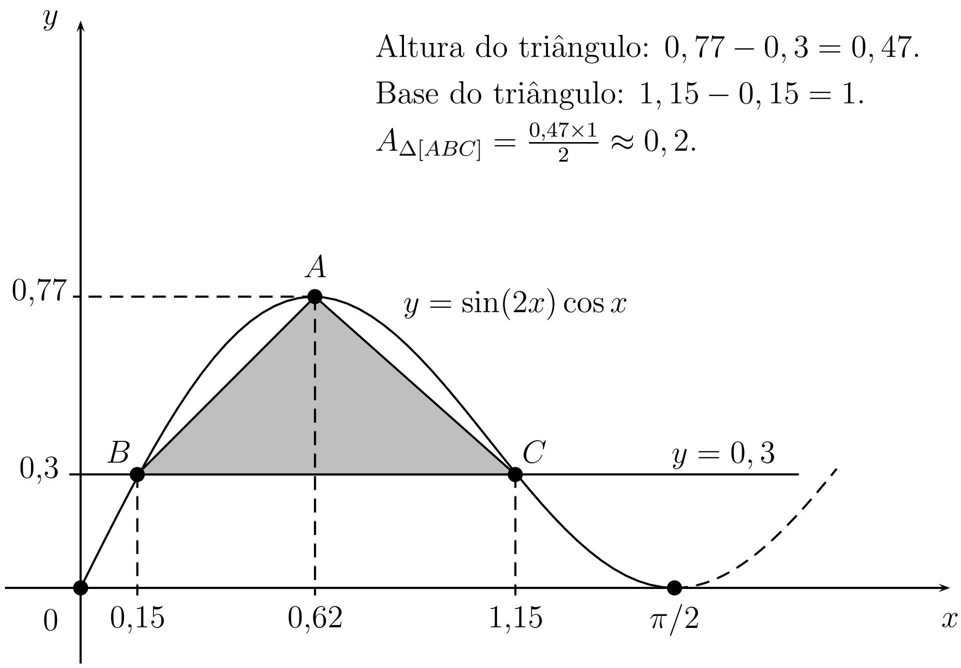
$$\begin{aligned} f'(x) &= (\operatorname{sen}(2x))' \cos x + (\cos x)' \operatorname{sen}(2x) \\ &= 2\cos(2x).\cos x - \operatorname{sen} x\,.\operatorname{sen}(2x) \end{aligned}$$

O declive da recta tangente é dado por

$$f'(0) = 2 \times 1 \times 1 - 0 \times 0 = 2$$

A ordenada na origem é $f(0) = 0$, uma vez que estamos a calcular a tangente no ponto $(0, f(0))$, pelo que $y = 2x$ é a equação pretendida.

5.2.



6.

6.1. $D_h = \mathbb{R}$.
Em $\mathbb{R}^-$, h é contínua por ser o quociente de duas funções contínuas.
Em $\mathbb{R}^+$, h é contínua por ser a diferença de duas funções contínuas.
Para $x = 0$,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{x} = 2 \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{2x} \underset{(1)}{=} 2 \lim_{y\to 0^-} \frac{e^{y}-1}{y} \underset{(2)}{=} 2 \times 1 = 2.$$

(1) Fazemos a mudança de variável $y = 2x$,
(2) Trata-se de um limite notável.

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt{x^2+4} - x\right) = \sqrt{0+4} - 0 = 2.$$

Como $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = h(0)$, a função é contínua no ponto 0.

Assim, a função é contínua em $\mathbb{R}$.

6.2. Não existem assimptotas verticais porque, como vimos na alínea anterior, a função é contínua em $\mathbb{R}$.

Assimptotas horizontais:

$$\lim_{x\to -\infty} h(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^{2x}-1}{x} = 0,$$

uma vez que

$$\lim_{x\to -\infty} \left(e^{2x}-1\right) = 0 - 1 = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -\infty} x = -\infty.$$

Assim, há uma assimptota horizontal quando $x \to -\infty$, que é $y = 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} h(x) &= \lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+4} - x\right) \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+4} - x)(\sqrt{x^2+4} + x)}{\sqrt{x^2+4} + x} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4} + x} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2+4} + x} \; = \; 0.
\end{aligned}$$

Portanto, existe uma assimptota horizontal quando $x \to +\infty$, que é também $y = 0$. Esta recta vem a ser assim a única assimptota horizontal, que é bilateral.

7. $A(t) = 2 - t + 5\ln(t+1)$, $t \in [0, 16[$.

7.1. $A(1) - A(0) = 2 - 1 + 5\ln 2 - 2 = -1 + 5\ln 2 \approx 2,47$ hectares.

7.2. $A'(t) = -1 + 5\dfrac{1}{t+1} = -1 + \dfrac{5}{t+1}$.

$$A'(t) = 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{5}{t+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{t+1} = 1 \Leftrightarrow t = 4.$$

t	0		4		16
$A'(t)$	4	+	0	$-$	n.d.
$A(t)$	2	$\nearrow$	max.	$\searrow$	n.d.

A área máxima é portanto $A(4) = 2 - 4 + 5\ln 5 \approx 6,05$ hectares.

Alternativamente poderia resolver-se a questão calculando simplesmente o zero da derivada e achando o valor da função nesse ponto (sem apresentar portanto o quadro de sinais).

A função é contínua e diferenciável no intervalo dado, e, segundo o enunciado, é possível dividir o intervalo $[0, 16[$ em dois, de modo que a função é crescente no primeiro e decrescente no segundo. Nestas circunstâncias, o único zero da derivada tem de ser o maximizante da função.