Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/Época Especial

12 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2009

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser primeiramente elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica, sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única alternativa correcta.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 4, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\, \pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\, \pi\, r^3$
(r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho}\, \operatorname{cis} \dfrac{\theta + 2k\pi}{n},\ k \in \{0, ..., n-1\}$

Probabilidades

$\mu = x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n$

$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 p_1 + \cdots + (x_n - \mu)^2 p_n}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approxeq 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approxeq 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approxeq 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -\, u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única alternativa correcta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a alternativa seleccionada.

Não apresente cálculos nem justificações.

1. Considere uma turma de uma escola secundária, com 8 rapazes e 12 raparigas.

Pretende-se eleger o Delegado e o Subdelegado da turma. De quantas maneiras se pode fazer essa escolha, de modo a que os alunos escolhidos sejam de sexos diferentes?

(A) 96 **(B)** 190 **(C)** 192 **(D)** 380

2. Duas crianças escrevem, em segredo e cada uma em seu papel, uma letra da palavra VERÃO.

Qual é a probabilidade de as duas crianças escreverem a mesma letra?

(A) $\frac{1}{25}$ **(B)** $\frac{2}{25}$ **(C)** $\frac{1}{5}$ **(D)** $\frac{2}{5}$

3. Seja X a variável peso, expressa em quilogramas (kg), dos bebés de uma creche.

Admita que a variável X é bem modelada por uma distribuição normal de valor médio 5.

Escolhido um dos bebés ao acaso, sabe-se que a probabilidade de o seu peso estar entre $5\,\mathrm{kg}$ e $6\,\mathrm{kg}$ é $0{,}4$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $P(X \geq 6) = 0{,}2$ **(B)** $P(4 \leq X \leq 5) = 0{,}4$

(C) $P(4 \leq X \leq 6) < 0{,}5$ **(D)** $P(X \leq 4) > 0{,}1$

4. Sejam a e b dois números reais superiores a 1 e tais que $b = a^2$.

Qual dos valores seguintes é igual a $1 + \log_b a$?

(A) $\frac{2}{3}$ **(B)** $\frac{3}{4}$ **(C)** $\frac{4}{3}$ **(D)** $\frac{3}{2}$

5. Seja a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$.

Qual é o declive da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $\frac{\pi}{8}$?

(A) $\sqrt{2}$ **(B)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(C)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

6. Na figura 1, está representada parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x$.

Considere um ponto, P, a deslocar-se sobre o semieixo positivo das abcissas.

Seja A o ponto pertencente ao gráfico da função que tem a mesma abcissa que o ponto P.

Para cada posição do ponto P, define-se um triângulo $[OAP]$.

Qual das expressões seguintes representa, em função de x (abcissa do ponto P), a área do triângulo $[OAP]$?

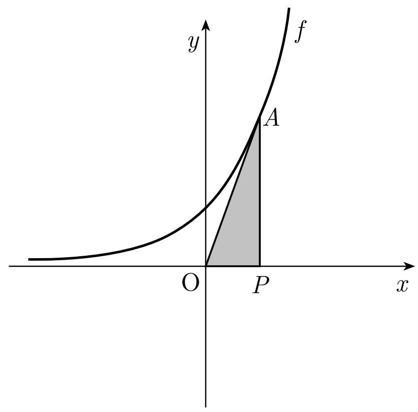


Fig. 1

(A) $x.e^x$ **(B)** $\frac{x.e^x}{2}$ **(C)** $\frac{x+e^x}{2}$ **(D)** e^x

7. Seja θ um número real pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Considere o número complexo $z = i.\operatorname{cis}(\theta)$.

Qual dos números complexos seguintes é o conjugado de z?

(A) $\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ **(B)** $\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ **(C)** $\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ **(D)** $\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)$

8. Considere, em $\mathbb{C}$, o número complexo $w = 2\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

No plano complexo, a imagem geométrica de w é um dos vértices do quadrado $[ABCD]$, com centro na origem O, representado na figura 2.

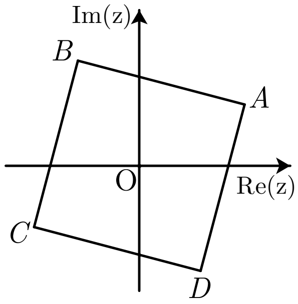


Fig. 2

Qual dos números complexos seguintes tem como imagem geométrica o vértice D do quadrado?

(A) $2\,\text{cis}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$

(B) $2\,\text{cis}\left(\dfrac{7\pi}{4}\right)$

(C) $2\,\text{cis}\left(\dfrac{11\pi}{6}\right)$

(D) $2\,\text{cis}\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Considere, em $\mathbb{C}$, o número complexo $z_1 = 3 - 2i$.

Determine, **sem recorrer à calculadora**, o número complexo $z = \dfrac{z_1 + {z_1}^2 + 2i^{43}}{8\operatorname{cis}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)}$.

Apresente o resultado na forma algébrica.

2. Determine o valor de θ, pertencente ao intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, de modo que a imagem geométrica do número complexo $(2\operatorname{cis}\theta)^2 \times (1 + \sqrt{3}\, i)$ pertença à bissectriz do 3.º quadrante.

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Mostre que $P(B) + P(\overline{A}) + P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 2P(\overline{A}) + P(A \cup B)$.

(P designa probabilidade e $\overline{A}$ designa acontecimento contrário de A.)

4. Considere o conjunto $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8\}$.

4.1. Com os elementos do conjunto A, quantos números pares de quatro algarismos se podem formar, que tenham dois e só dois algarismos iguais a 5 ?

4.2. De entre os elementos do conjunto A, escolhe-se um deles, ao acaso.

Considere a variável aleatória X: «número de divisores do elemento escolhido».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X e determine o seu valor médio.

Apresente o resultado na forma de dízima.

Nota: Apresente o valor das probabilidades na forma de fracção irredutível.

5. Considere o ponto $A\ (1,\ 1)$, representado na figura 3.

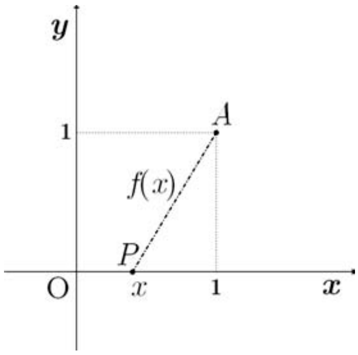


Fig. 3

Admita que um ponto, P, parte da origem O do referencial e se desloca ao longo do semieixo positivo $\mathrm{O}x$.

Para cada posição do ponto P, seja x a abcissa de P.

Seja f a função que, a cada valor de x, faz corresponder a distância do ponto P ao ponto A.

Apenas um dos seguintes gráficos pode representar a função f.

Numa pequena composição, explique por que razão cada um dos outros três gráficos não pode representar a função f.

Gráfico 1

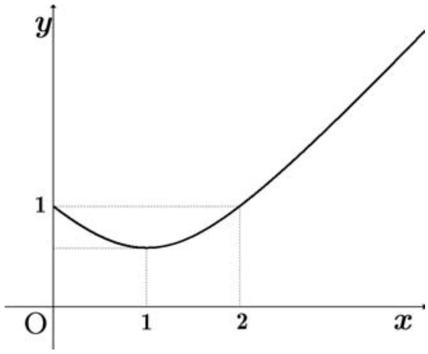


Gráfico 2

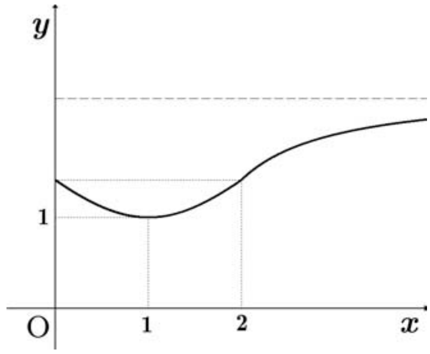


Gráfico 3

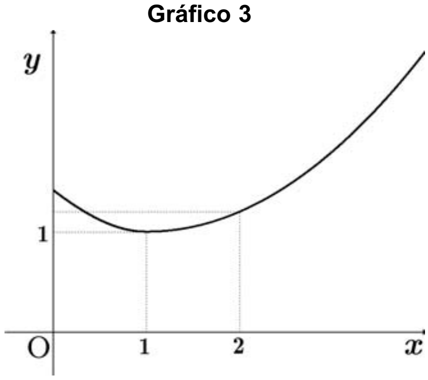
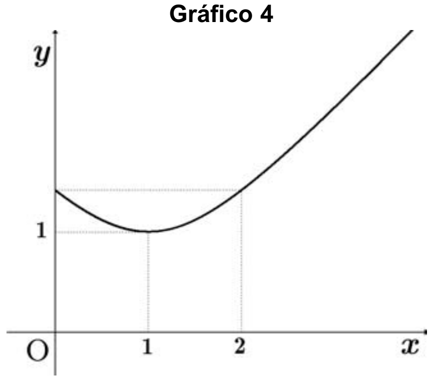


Gráfico 4



6. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \dfrac{e^x + 3}{e^x}$.

Estude, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, a função g, quanto à existência de assimptotas do seu gráfico e, caso existam, escreva as suas equações.

7. Seja a função f, de domínio $\left[0, \pi\right[$, definida por $f(x) = e^x . \cos x$.

7.1. Estude, **recorrendo exclusivamente a métodos analíticos**, a função f, quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos, indicando os intervalos de monotonia e, caso existam, os extremos relativos.

7.2. Determine, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**, um valor, aproximado às décimas, da área do trapézio $[OABC]$, em que:

- O é a origem do referencial;
- A é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo $\mathrm{O}y$;
- B é o ponto do gráfico de f, tal que a recta AB é paralela ao eixo $\mathrm{O}x$;
- C é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo $\mathrm{O}x$.

Reproduza, na folha de respostas, o gráfico visualizado na calculadora, incluindo o referencial.

Desenhe o trapézio $[OABC]$, assinalando os pontos que representam os seus vértices.

Nota: Nas coordenadas dos vértices em que é necessário fazer arredondamentos, utilize duas casas decimais.

8. Admita que a magnitude, M, de um sismo é dada, na escala de Richter, por

$$M = 0{,}67 \log E - 3{,}25$$

sendo E a energia, em joules, libertada por esse sismo.

($\log$ designa logaritmo de base 10.)

Resolva, **recorrendo exclusivamente a métodos analíticos**, os dois itens seguintes.

Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

8.1. Sejam E_1 e E_2 as energias libertadas por dois sismos de magnitudes M_1 e M_2, respectivamente.

Determine $\dfrac{E_1}{E_2}$, com aproximação às unidades, sabendo que $M_1 - M_2 = 1$.

Interprete o valor obtido no contexto da situação apresentada.

8.2. O sismo que ocorreu nos Açores, no dia 1 de Abril de 2009, teve magnitude $4{,}7$, na escala de Richter.

Qual foi a energia libertada nesse sismo?

Escreva o resultado em notação científica, isto é, na forma $a \times 10^b$, sendo b um número inteiro, e a um número entre 1 e 10.

Apresente o valor de a arredondado às unidades.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I	(8 × 5 pontos)	**40 pontos**
GRUPO II		**160 pontos**
1.	15 pontos	
2.	15 pontos	
3.	15 pontos	
4.	30 pontos	
4.1. 15 pontos		
4.2. 15 pontos		
5.	15 pontos	
6.	15 pontos	
7.	30 pontos	
7.1. 15 pontos		
7.2. 15 pontos		
8.	25 pontos	
8.1. 15 pontos		
8.2. 10 pontos		
TOTAL		**200 pontos**