Proposta de resolução da Prova de Matemática A (código 635)

21 de Junho de 2010

Grupo I

1. Como A e B são acontecimentos incompatíveis, $P(A \cap B) = 0$ e
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
   Ou seja, de acordo com os dados do enunciado,
   $70\% = 30\% + P(B) \Leftrightarrow P(B) = 40\%$

   A opção correcta é:

Versão 1:	B
Versão 2:	C

2. Como se trata de uma única acção de formação, podem seleccionar-se aleatoriamente ${}^{10}C_3$ grupos de três trabalhadores, que são os casos possíveis. Como os três amigos constituem um único grupo a probabilidade solicitada é $\frac{1}{{}^{10}C_3}$.

   A opção correcta é:

Versão 1:	C
Versão 2:	B

3. Como se trata de uma distribuição de probabilidade, a soma das probabilidades tem que ser 1.

   $$\begin{aligned} \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + 2a + a = 1 &\Leftrightarrow 3a = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 3a = \frac{10}{10} - \frac{2}{10} - \frac{5}{10} \\ &\Leftrightarrow 3a = \frac{3}{10} \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

   Logo $P(X = 2) = 2 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$
   Pelo que $P(X = 0) = P(X = 2)$

   A opção correcta é:

Versão 1:	B
Versão 2:	C

4. Como f é uma função afim, $f''(x) = 0$.

   Sabe-se que $h''(x) = f''(x) + (e^x)''$

   $= 0 + e^x$

   $= e^x$

   Das quatro representações gráficas apresentadas a única que pode representar a função $h''(x) = e^x$ é:

Versão 1:	A
Versão 2:	D

5. Da observação da parte do gráfico da função f apresentada, e pelo facto da recta de equação $x = 1$ ser assímptota do seu gráfico, podemos concluir que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$.

   Logo $\lim_{x\to 1^-} \frac{3x}{f(x)} = \frac{\lim_{x\to 1^-}(3x)}{\lim_{x\to 1^-} f(x)} = \frac{3}{+\infty} = 0$.

   A opção correcta é:

Versão 1:	C
Versão 2:	B

6. Se considerarmos $[OB]$ como a base do triângulo, temos que $\overline{OB}$=1, sendo a altura a medida correspondente à ordenada de A, isto é, 5. Pelo que a área do triângulo é $\frac{1\times 5}{2} = \frac{5}{2}$

   A opção correcta é:

Versão 1:	A
Versão 2:	D

7. Um número complexo *w* é um imaginário puro se $arg(w) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

   Logo z é um imaginário puro se $\frac{\pi}{8} - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow \theta = -\frac{3\pi}{8} + k\pi,\ k \in Z$

   Para $k = 1,\ \theta = \frac{5\pi}{8}$

   A opção correcta é:

Versão 1:	D
Versão 2:	A

8. Como todos os números complexos que têm a sua imagem geométrica na região representada na figura têm módulo superior a 3 e nenhum deles é imaginário puro temos que:

A opção correcta é:

Versão 1:	B
Versão 2:	C

Grupo II

1.

1.1.

$$w=\frac{3-i\times(z_1)^7}{\overline{z_2}}=\frac{3-i\times\left(\text{cis}\frac{\pi}{7}\right)^7}{2-i}=\frac{3-i\times(\text{cis}\pi)}{2-i}=\frac{3-i\times(-1)}{2-i}=\frac{3+i}{2-i}\times\frac{2+i}{2+i}=$$

$$=\frac{6+3i+2i+i^2}{4-i^2}=\frac{6+5i-1}{5}=\frac{5+5i}{5}=1+i$$

Na forma trigonométrica: $\rho=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\tan\theta=1\\ \theta\in 1^{\text{o}}\,\text{Q}\end{array}\right\}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

Então: $w=1+i=\sqrt{2}\text{cis}\frac{\pi}{4}$

1.2.

$$|z_1+z_2|^2=\left|\text{cis}\left(\frac{\pi}{7}\right)+2+i\right|^2=\left|\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)+2+i\right|^2=$$

$$=\left|\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+2\right)+\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)+1\right)i\right|=\left(\sqrt{\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+2\right)^2+\left(\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)+1\right)^2}\right)^2=$$

$$=\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+4+\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right)+2\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)+1=$$

$$=\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)+\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{7}\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+2\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)+5=$$

$$=6+4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+2\text{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

c.q.d.

Sociedade Portuguesa de Matemática
Av. da República 45 - 3ºesq., 1050–187 Lisboa
Tel. 21 795 1219 / Fax 21 795 2349
www.spm.pt imprensa@spm.pt

Proposta de Resolução da Sociedade Portuguesa de Matemática para o Exame Nacional de Matemática A
Prova 635, 1ª Chamada – 21 de Junho de 2010

Grupo I

	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	B	C	B	A	C	A	D	B
Versão 2	C	B	C	D	B	D	A	C

Grupo II

1.1.

$$w=\frac{3-i.\left(cis\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)^7}{2-i}=\frac{3-i.cis(\pi)}{2-i}=\frac{3-i.(-1)}{2-i}=\frac{3+i}{2-i}=\frac{(3+i).(2+i)}{(2-i).(2+i)}=\frac{6+3i+2i-1}{2^2+1^2}=$$

$$=1+i=\sqrt{2}.cis\frac{\pi}{4}.$$

1.2. $z_1=cis\left(\frac{\pi}{7}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$

$$|z_1+z_2|^2=\left(2+\cos\frac{\pi}{7}\right)^2+\left(1+\sin\frac{\pi}{7}\right)^2=4+4\cos\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{\pi}{7}+1+2\sin\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{\pi}{7}=$$

$$=\sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{7}\right)+5+2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)=1+5+2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)=$$

$$=6+2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\qquad c.q.d.$$

2.1. No universo formado pelo conjunto dos alunos da escola, sejam os acontecimentos:

A: "o aluno tem computador portátil"

B:" o aluno sabe o nome do director"

$P(A)=\frac{1}{5}$; $P(B)=\frac{1}{2}$ sendo $P(\overline{B})=1-P(B)=\frac{1}{2}$

$$P(A \mid \overline{B}) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(A \cap \overline{B}) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B}) = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$$

Assim, $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{30} = \frac{7}{15}$.

2.2. Número de alunos que têm computador portátil: $\frac{1}{5} \times 150 = 30$

Assim há ${}^{30}C_4 \times {}^{120}C_2 = 195671700$ maneiras diferentes de se formar uma comissão nas condições pretendidas.

3. A regra de Laplace diz-nos que a probabilidade de um acontecimento é calculada pelo quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis, sendo estes todos equiprováveis.
O número total de extracções é dado por ${}^{18}C_2$, que representa o número de maneiras possíveis de escolher 2 bolas de entre 18.
Por outro lado, existem ${}^{12}C_2$ pares possíveis de bolas azuis e ${}^{6}C_2$ pares de bolas vermelhas. Assim, o número total de pares de bolas da mesma cor é dado por ${}^{12}C_2 + {}^{6}C_2$, o que corresponde ao número total de tiragens favoráveis.
Finalmente, pela regra de Laplace, a probabilidade pedida é:

$$P = \frac{{}^{12}C_2 + {}^{6}C_2}{{}^{18}C_2} = \frac{\frac{12\times 11}{2} + \frac{6\times 5}{2}}{\frac{18\times 17}{2}} = \frac{12\times 11 + 6\times 5}{18\times 17},$$

pelo que a resposta fornecida no enunciado está correcta.

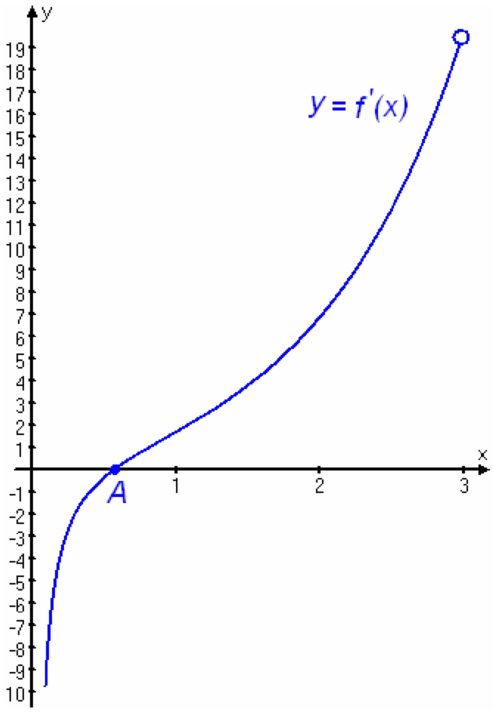
4.1. Tem-se $N(t) = 24\log_4(3t+1) - 8\log_4(3t+1) = 16\log_4(3t+1), \forall t \in [0,5]$

4.2. Para todo $t \in [0,5]$ tem-se

$$N(t) = 24 \Leftrightarrow 16\log_4(3t+1) = 24 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \log_4(3t+1) = 1{,}5 \Leftrightarrow 3t+1 = 8 \Leftrightarrow t = \frac{7}{3}$$

R: Foram necessárias 2 horas e 20 minutos.

5.



A(a, 0)

a ≈ 0,57

f' é negativa no intervalo]0,a[, logo *f* é estritamente decrescente em]0, a].
f' é positiva no intervalo]a,3[, logo *f* é estritamente crescente em [a, 3[.
f tem um mínimo em $x = $ a.

6.1. Por definição de Assimptota Não Vertical:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)] = \lim_{x\to-\infty}[ax+b+e^x-(ax+b)] = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Assim, $y = ax+b$ com $a \neq 0$ é a equação de uma assimptota oblíqua do gráfico de *f*.

6.2. *f* é contínua sse $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

Tem-se que:

$f(0) = b+1$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = b+1$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} - 2\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(2x)}{2x} = 1-2\times 1 = -1$$

Logo *f* é contínua em 0 sse $b+1=-1$, ou seja, $b=-2$

7.1. $O\hat{B}A = \frac{\pi}{2} rad$ visto ser um ângulo inscrito numa semi-circunferência.

Usando as razões trigonométricas no triângulo rectângulo [OAB]:

$$sen\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2sen\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OB} = 2\cos\alpha .$$

Assim, o perímetro do triângulo [OAB] é dado por:

$$f(\alpha) = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{OB} = 2(1+\cos\alpha + sen\alpha),\ \forall\alpha\in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[.$$

7.2. $f'(\alpha) = 2(-sen\alpha + \cos\alpha) = 2(\cos\alpha - sen\alpha),\forall\alpha\in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

$$f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = sen\alpha \wedge \alpha\in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

α	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\alpha)$	n.d.	+	0	-	n.d.
$f(\alpha)$	n.d.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	n.d.

Logo *f* atinge o máximo em $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

FIM