

## Proposta de resolução da Prova de Matemática A (código 635)

2ª fase

19 de Julho de 2010

### Grupo I

1.

Como só existem bolas de dois tipos na caixa e a probabilidade de sair bola azul é  $\frac{1}{2}$ , existem tantas bolas roxas quantas as azuis, que são 8.

Resposta correcta:

|             |
|-------------|
| Versão 1: C |
| Versão 2: B |

2.

Escolhendo três das cinco posições do número para os algarismos 5, temos  ${}^5C_3$  hipóteses e podem ainda ser colocados os 4 restantes algarismos nas 2 restantes posições, podendo fazê-lo com repetição ( $4^2$  hipóteses), pelo que existem  ${}^5C_3 \times 4^2$  números nas condições do enunciado.

Resposta correcta:

|             |
|-------------|
| Versão 1: B |
| Versão 2: C |

3.

Na linha do triângulo de Pascal em causa apenas os números reproduzidos no enunciado são inferiores ou iguais a 105, pelo que nenhum dos restantes poderia ser parcela de uma soma com resultado 105. Dos números apresentados também não é possível somar dois deles com o resultado 105, pelo que nenhum par de números desta linha do Triângulo de Pascal tem soma 105, logo o valor da probabilidade solicitada é 0 (zero).

Resposta correcta:

|             |
|-------------|
| Versão 1: D |
| Versão 2: A |

4.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - 2x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$

Como a função  $h$  é par,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ ,

Ou seja  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$

Resposta correcta:

|             |
|-------------|
| Versão 1: A |
| Versão 2: D |

5.

Como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^+$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [\ln(u_n)] = \ln 0^+ = -\infty$$

Resposta correcta:

|             |
|-------------|
| Versão 1: D |
| Versão 2: A |

6.

Pela observação do gráfico da função  $f'$ , derivada da função  $f$ , conclui-se que no intervalo  $]0, a[$  a função derivada é positiva, logo a função é crescente nesse intervalo.

Resposta correcta:

|             |
|-------------|
| Versão 1: C |
| Versão 2: B |

7.

Como o vértice A é a representação geométrica de um número complexo de módulo 1, o mesmo acontecerá com o número complexo representado geometricamente pelo vértice D.

Como os argumentos dos números complexos representados por dois vértices consecutivos do pentágono diferem de  $\frac{2\pi}{5}$ , o argumento do número complexo representado pelo vértice D será  $3 \times \frac{2\pi}{5} = \frac{6\pi}{5}$ .

Resposta correcta:

|             |
|-------------|
| Versão 1: B |
| Versão 2: C |

8.

Como  $w = \rho \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ ,  $w^6 = \rho^6 \operatorname{cis}\left(6 \times \frac{3\pi}{2}\right) = \rho^6 \operatorname{cis}\left(\frac{18\pi}{2}\right) = \rho^6 \operatorname{cis}(9\pi) = \rho^6 \operatorname{cis} \pi$ .

Logo a representação geométrica de  $w^6$  pertence ao eixo real.

Resposta correcta:

|             |
|-------------|
| Versão 1: A |
| Versão 2: D |

## Grupo II

1.

1.1.

$$z_1^4 = (\sqrt{2})^4 \operatorname{cis}\left(4 \times \frac{\pi}{4}\right) = 4 \operatorname{cis}(\pi) = -4$$

$$w = \frac{-4+4i}{i} = \frac{(-4+4i) \times i}{i \times i} = \frac{-4i+4i^2}{i^2} = \frac{-4-4i}{-1} = 4+4i$$

Na forma trigonométrica:  $\rho = \sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$

$$\left. \begin{array}{l} \tan \theta = 1 \\ \theta \in 1^\circ \text{Q} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Então:  $w = 4+4i = 4\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$

1.2.

$$z_1 = \sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} i = 1 + i$$

Sejam  $A$  e  $B$  as imagens geométricas dos complexos  $z_1$  e  $z_2$ .

Temos então que as suas coordenadas são :  $A(1,1)$  e  $B(3,0)$

O raio da circunferência é  $\overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

A condição pedida é, pois,  $|z-3| = \sqrt{5}$

2.

2.1. A variável aleatória  $X$ , tal como está definida, toma os valores  $-3, -2, -1, 0$  e  $1$

$$P(X = -3) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$P(X = -2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$P(X = -1) = \frac{4}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 0) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$

$$P(X = 1) = \frac{4}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

A tabela de distribuição de  $X$  é, assim:

|              |                |                |               |                |               |
|--------------|----------------|----------------|---------------|----------------|---------------|
| $x_i$        | $-3$           | $-2$           | $-1$          | $0$            | $1$           |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{5}{9}$ |

- 2.2.  $P(L | J)$  representa a probabilidade de o ponto  $Q$  pertencer ao 3º quadrante sabendo que o número saído no dado A é negativo.

Ora, para que o ponto  $Q$  pertença ao 3º quadrante é necessário que tenha abcissa e ordenada negativas. Já sabemos que a sua abcissa é negativa, visto que o número saído no dado A é negativo. Então basta agora que a sua ordenada seja também negativa. Assim sendo, para que isso aconteça, existe apenas um caso favorável entre seis possíveis (a saída da face -1 no dado B). Como todos os acontecimentos são equiprováveis, pela regra de Laplace, vem que  $P(L | J) = \frac{1}{6}$

3.

$$\begin{aligned} \frac{P(A \cup B)}{P(B)} - P(\bar{A} | B) &= \frac{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} - \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A) + P(B) - P(A \cap B) - [P(B) - P(A \cap B)]}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \end{aligned}$$

c.q.d.

4.

- 4.1. Atendendo ao domínio da função, a existir assíntota oblíqua, ela será quando  $x \rightarrow +\infty$ .

Determinemos, se existir, o seu declive:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{5}x - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{5}x}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{5} - 0 = \frac{1}{5}$$

E a sua ordenada na origem, se existir:

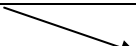
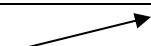
$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{5}x - \ln x - \frac{1}{5}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln x) = -\infty$$

Como  $b$  não é um número real, então o gráfico da função não admite assíntotas oblíquas.

4.2. Estudemos, no intervalo  $]2, +\infty[$ , a função derivada de  $f$ .

$$f'(x) = \frac{1}{5} - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5} - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x = 5$$

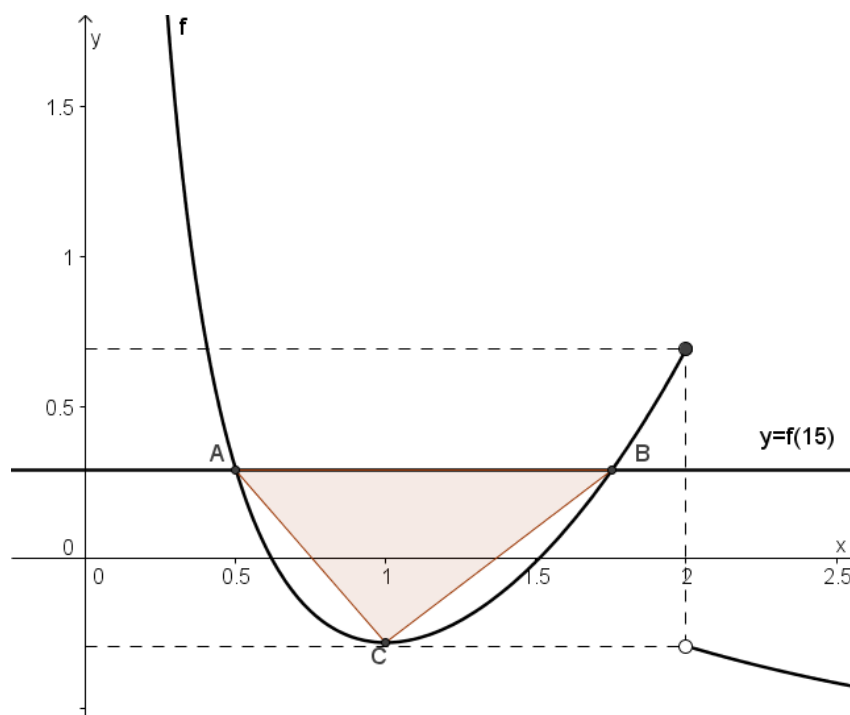
|         |      |   |     |   |
|---------|------|---|-----|---|
|         | 2    |   | 5   | $+\infty$   |
| $f'(x)$ | n.d. | -   | 0   | +   |
| $f(x)$  | n.d. |  | min |  |

Estudado o comportamento da função podemos concluir que admite um mínimo para  $x = 5$ , que é  $f(5) = 1 - \ln 5$ , pelo que  $f$  admite no intervalo  $]2, +\infty[$  um extremo relativo, c.q.d.

4.3.

$$f(15) = 3 - \ln 15$$

Utilizando as capacidades gráficas da calculadora, representemos graficamente a função  $f$  e a recta de equação  $y = 3 - \ln 15$ .



Determinando a intersecção da recta com o gráfico da função obtemos para as coordenadas de  $A$  e de  $B$ , as seguintes:  $A(0,50 ; 0,29)$  e  $B(1,75 ; 0,29)$ .

Determinando o mínimo da função no intervalo em causa, obtemos para coordenadas do ponto  $C(1,00 ; -0,28)$

Temos então que a área do triângulo  $[ABC]$  é dada por

$$\frac{(1,75 - 0,50) \times (3 - \ln(15) + 0,28)}{2} \approx 0,4$$

5.

5.1.  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , por se tratar de soma e composição de funções contínuas, logo é também contínua no intervalo  $[-2, -1]$ .

$$f(-2) = 2 + e^{2 \times (-8) - 1} \approx 2,000$$

$$f(-1) = 1 + e^{2 \times (-1) - 1} \approx 1,050$$

Ora  $f(-1) < 1,5 < f(-2)$ , logo, pelo Teorema de Bolzano, há-de existir pelo menos um valor  $x_1 \in ]-2, -1[$  tal que  $f(x_1) = 1,5$  ou seja, a equação  $f(x) = 1,5$  tem pelo menos uma solução nesse intervalo, c.q.d.

5.2.  $f'(x) = -1 + 6x^2 e^{2x^3 - 1}$

$$f'(0) = -1 + 0 \times e^{-1} = -1$$

$$f(0) = 0 + e^{2 \times 0 - 1} = e^{-1}$$

A recta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa zero tem declive  $f'(0) = -1$  e contém o ponto de coordenadas  $(0, \frac{1}{e})$  logo a sua equação reduzida é  $y = -x + \frac{1}{e}$

6.

6.1. A altura do combustível no reservatório é dada por  $\overline{AC} = \overline{OA} - \overline{OC}$  para  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}]$  e por  $\overline{AC} = \overline{OA} + \overline{OC}$  para  $\theta \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$ .

Para  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}]$  temos que

$$\cos \theta = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{\overline{OC}}{3} \Leftrightarrow 3 \cos \theta = \overline{OC}$$

$$\overline{AC} = 3 - \overline{OC} = 3 - 3 \cos \theta$$

Para  $\theta \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$  temos que

$$\begin{aligned} \cos(\pi - \theta) &= \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \cos(\pi - \theta) = \frac{\overline{OC}}{3} \Leftrightarrow 3 \cos(\pi - \theta) = \overline{OC} \\ &\Leftrightarrow -3 \cos \theta = \overline{OC} \end{aligned}$$

$$\overline{AC} = 3 + \overline{OC} = 3 - 3 \cos \theta$$

Logo, em qualquer dos casos, a altura do combustível no reservatório é dada pela expressão  $3 - 3 \cos \theta$ , ou seja,  $h(\theta) = 3 - 3 \cos \theta$ , c.q.d.

6.2.

$$h(\theta) = 3 \Leftrightarrow 3 - 3 \cos \theta = 3 \Leftrightarrow -3 \cos \theta = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = 0$$

Como  $\theta \in ]0, \pi[$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Quando a altura do combustível no depósito é 3, o ângulo AOB é  $\frac{\pi}{2}$  rad. Portanto  $C \equiv O$ , e o depósito está a metade da sua capacidade.

**FIM**

Esta proposta de resolução também pode ser consultada em <http://www.apm.pt>