Proposta de resolução do exame nacional de Matemática A
(PROVA 635) 2ªFASE – 27 Julho 2011

Grupo I

1. Pela Regra de Laplace temos que a probabilidade do acontecimento é dada por :

   $$P=\frac{{}^{20}C_4}{{}^{30}C_4}$$

   Opção correcta: versão 1: B versão 2: C

2. Atendendo aos dados fornecidos temos que:

   $$P(X=0)+P(X=1)=\frac{3}{10}\Leftrightarrow 3a=\frac{3}{10}\Leftrightarrow a=\frac{1}{10}$$

   Então: $b+b+b=1-\frac{4}{10}\Leftrightarrow 3b=\frac{6}{10}\Leftrightarrow b=\frac{1}{5}$

   Opção correcta: versão 1: D versão 2: A

3. A distribuição, por ser normal, é simétrica em relação à sua média que é zero. Então $P(X\le a)=P(X\ge -a)$

   Opção correcta: versão 1: B versão 2: C

4. Como *f* é polinomial de grau 4 e com dois pontos de inflexão então a função segunda derivada é polinomial de grau dois com dois zeros distintos. Atendendo aos sentidos de concavidade apresentados temos que $f''(x)=x^2-9$

   Opção correcta: versão 1: D versão 2: A

5. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{sen\, x}{3x}\right)=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{sen\, x}{x}\right)=\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\ln\left(k-x\right)\right)=\ln k$

$g\left(0\right)=\ln k$

Como a função é contínua então temos que $\ln k=\frac{1}{3}\Leftrightarrow k=e^{1/3}\Leftrightarrow k=\sqrt[3]{e}$

Opção correcta: versão 1: A versão 2: B

6. $\overline{OE}=sen\,\theta \qquad \overline{EA}=\cos\theta \qquad \overline{OA}=1$

Perímetro $=2\left(sen\,\theta+\cos\theta+1\right)$

Opção correcta: versão 1:C versão 2: D

7. $|z|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2$

$tg\ \theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \wedge \quad \theta\in 2^{\text{o}}\,\text{quadrante}$, pelo que $\theta=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\pi$

Opção correcta: versão 1: B versão 2: B

8. Por construção geométrica temos que:

$z_2+z_4=z_3$

A multiplicação de z_3 por *i* produz uma rotação de 90^{o} ,no sentido positivo, do afixo de z_3 conduzindo-nos a z_5 .

Opção correcta: versão 1: C versão 2: B

Grupo II

1.

1.1.

$$w=\frac{(1+2i)\times i^{4n+3}-b}{\sqrt{2}cis\left(\frac{5}{4}\pi\right)}=\frac{(1+2i)\times i^{3}-b}{\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}=\frac{(1+2i)\times(-i)-b}{-1-i}=$$

$$=\frac{-i-2i^2-b}{-1-i}\times\frac{-1+i}{-1+i}=\frac{(-i+2-b)(-1+i)}{1-i^2}=\frac{i-2+b-i^2+2i-bi}{2}=\frac{-1+b+(3-b)i}{2}=$$

$$=\frac{-1+b}{2}+\frac{3-b}{2}i$$

Para *w* ser um número real, tem que se verificar:

$$\frac{3-b}{2}=0\Leftrightarrow 3-b=0\Leftrightarrow b=3$$

1.2.

Seja $z=a+bi$ com $a\,,b\in IR$

Se $|z|=1$, então $\sqrt{a^2+b^2}=1\Leftrightarrow a^2+b^2=1$

Pelo que:

$$|1+z|^2+|1-z|^2=|1+a+bi|^2+|1-a-bi|^2=\left(\sqrt{(1+a)^2+b^2}\right)^2+\left(\sqrt{(1-a)^2+(-b)^2}\right)^2=$$

$$=1+2a+a^2+b^2+1-2a+a^2+b^2=2+2\left(a^2+b^2\right)=2+2\times1=4 \quad \text{c.q.d.}$$

2.

2.1.

Consideremos os seguintes acontecimentos:

A: ser licenciado

B: ter idade inferior a 40 anos

A partir dos dados fornecidos construímos a tabela seguinte em que se registam as diferentes probabilidades dos acontecimentos respectivos:

	B	$\overline{\mathrm{B}}$	Total
A	0,48	0,12	0,6
$\overline{\mathrm{A}}$	0,04	0,36	0,4
Total	0,52	0,48	1

Pretendemos determinar:

$$P\left(\mathrm{A}\middle|\overline{\mathrm{B}}\right)=\frac{P\left(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}}\right)}{P\left(\overline{\mathrm{B}}\right)}=\frac{0{,}12}{0{,}48}=\frac{1}{4}$$

2.2.

A resposta correcta é a II, ou seja, $6\times{}^{9}C_{2}+{}^{9}C_{3}$.

Ao escolher ao acaso 3 funcionários, de entre um grupo de 15, ter pelo menos 2 funcionários que estejam a favor do novo horário, quer dizer que estes poderão ser 2 ou 3.

O número de hipóteses de serem os 3 a favor é dado por ${}^{9}C_{3}$ uma vez que se escolhem 3 entre os 9 funcionários a favor.

O número de hipóteses de serem apenas 2 a favor entre os 3 escolhidos é dado por $6\times{}^{9}C_{2}$ uma vez que se escolhem 2 entre os 9 a favor e 1 dos 6 funcionários que não são a favor.

Assim, o número total de hipóteses corresponde a $6\times{}^{9}C_{2}+{}^{9}C_{3}$.

Por outro lado, o acontecimento contrário ao solicitado seria ter 0 ou 1 funcionário a favor do novo horário, de entre os 3 escolhidos ao acaso no grupo de 15.

O número total de maneiras diferentes de escolher os 3 funcionários entre os 15 é dado por ${}^{15}C_{3}$

O número total de maneiras diferentes de entre os 3 funcionários escolhidos nenhum ser a favor é dado por e ${}^{6}C_{3}$ e o número total de maneiras diferentes de entre os 3 funcionários escolhidos apenas 1 ser a favor é dado por $9\times{}^{6}C_{2}$

Então, alterando a expressão I para ${}^{15}C_{3}-{}^{6}C_{3}-9\times{}^{6}C_{2}$ obtém-se também uma resposta correcta para o problema.

3.

3.1.

$$N_A(0)=\frac{120}{1+7\times e^{-0,2\times 0}}=15 \text{ e } N_A(7)=\frac{120}{1+7\times e^{-0,2\times 7}}\approx 44,02$$

$$N_A(7)-N_A(0)\approx 44-15=29$$

O aumento foi de 29 nenúfares

3.2.

$$N_A(t)=N_B(t)\Leftrightarrow \frac{120}{1+7\times e^{-0,2t}}=\frac{150}{1+50\times e^{-0,4t}}\Leftrightarrow 120+6000\times e^{-0,4t}=150+1050\times e^{-0,2t}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6000\times e^{-0,4t}-1050\times e^{-0,2t}-30=0\Leftrightarrow 6000\times\left(e^{-0,2t}\right)^2-1050\times e^{-0,2t}-30=0$$

Seja $y=e^{-0,2t}$. Substituindo na expressão anterior, temos que:

$$6000y^2-1050y-30=0\Leftrightarrow y=\frac{1}{5}\vee y=-\frac{1}{40}$$

Como $y\geq 0$ para qualquer elemento do domínio temos $y=\frac{1}{5}$

Ou seja $e^{-0,2t}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow t=\frac{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}{-0,2}\approx 8,05$

No decorrer do 9º dia o número de nenúfares no lago A iguala o do lago B, pelo que só depois de passados 8 dias completos se dá a igualdade nos dois lagos.

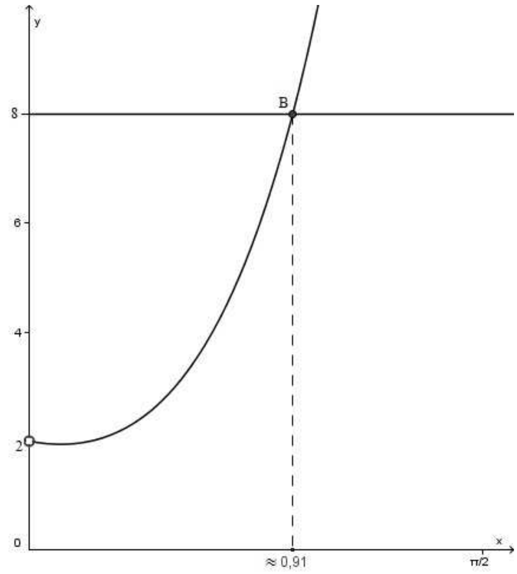
4.

Atendendo aos dados do problema temos que o valor do declive da recta tangente ao gráfico de *f* no ponto B tem que ser 8.

$$f'(x)=2e^{2x}-\sin x-4x$$

Seja x a abcissa de B. Então $f'(x)=8\Leftrightarrow 2e^{2x}-\sin x-4x=8$

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, numa janela adequada, representamos a curva correspondente a $f'(x)$ e a recta de equação $y=8$.



Determinando a intersecção obtemos para a abcissa de B o valor de $0,91$, aproximadamente.

5.

5.1. Em cada um dos ramos em que se encontra definida, a função é contínua por se tratar de quocientes de funções contínuas no respectivo domínio. A existir assimptota vertical, esta terá de equação $x=2$. Estudemos os limites necessários:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{e^{2-x}-1}{x-2} = -\lim_{x\to 2^-} \frac{e^{2-x}-1}{2-x} \qquad (1)$$

Fazendo $y=2-x$ temos que quando $x\to 2^-$ vem $y\to 0^+$, pelo que de (1) vem:

$$-\lim_{x\to 2^-} \frac{e^{2-x}-1}{2-x} = -\lim_{y\to 0^+} \frac{e^{y}-1}{y} = -1$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x+1}{\ln(x+1)} = \frac{3}{\ln 3}$$

Os limites estudados são reais, pelo que o gráfico de *f* não admite assimptotas verticais.

5.2.

A função f é contínua em $[0,2[$ por se tratar do quociente de funções contínuas pelo que também o é no intervalo $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Estamos então em condições de aplicar o Teorema de Bolzano.

$$f(0)=\frac{e^2-1}{-2}\approx -3{,}19$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{e^{2-\frac{1}{2}}-1}{\frac{1}{2}-2}\approx -2{,}32$$

Ora, como $f(0)<-3<f\left(\frac{1}{2}\right)$, então, pelo referido teorema, existe pelo menos um valor $x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$ tal que $f(x)=-3$ c.q.d.

5.3.

Para $x>2$, vem:

$$f'(x)=\left(\frac{x+1}{\ln(x+1)}\right)'=\frac{\ln(x+1)-(x+1)\frac{1}{x+1}}{\left(\ln(x+1)\right)^2}=\frac{\ln(x+1)-1}{\left(\ln(x+1)\right)^2}$$

Ora, para $x>2$, temos que $\ln(x+1)-1>0$, e, por outro lado, $\left(\ln(x+1)\right)^2>0$ pelo que: $f'(x)>0$, $\forall x\in\,]2,+\infty[$

Então f é estritamente crescente neste intervalo.

6.

$$f'(x)=-an\sin(nx)+bn\cos(nx)$$
$$f''(x)=-an^2\cos(nx)-bn^2\sin(nx)$$
$$f''(x)+n^2f(x)=-an^2\cos(nx)-bn^2\sin(nx)+n^2\left(a\cos(nx)+b\sin(nx)\right)=$$
$$=-an^2\cos(nx)-bn^2\sin(nx)+an^2\cos(nx)+bn^2\sin(nx)=0\quad\text{c.q.d.}$$

FIM

Esta proposta de resolução também pode ser consultada em http://www.apm.pt