

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase – Prova Especial

11 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2011

COTAÇÕES

GRUPO I

..... (8 × 5 pontos).....	40 pontos
	40 pontos

GRUPO II

1.		
1.1.	15 pontos
1.2.	15 pontos
2.		
2.1.	10 pontos
2.2.	15 pontos
2.3.	15 pontos
3.		
3.1.	15 pontos
3.2.	15 pontos
4.		
4.1.	15 pontos
4.2.	15 pontos
5.	15 pontos
6.	15 pontos
		160 pontos
		200 pontos

A classificação da prova deve respeitar integralmente os critérios gerais e os critérios específicos a seguir apresentados.

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos de classificação apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro, previsto na grelha de classificação.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos. No entanto, em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se o examinando responder a um mesmo item mais do que uma vez, não eliminando inequivocamente a(s) resposta(s) que não deseja que seja(m) classificada(s), deve ser considerada apenas a resposta que surgir em primeiro lugar.

Nos itens de selecção (escolha múltipla), a cotação total do item é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a única opção correcta.

São classificadas com zero pontos as respostas em que seja assinalada:

- uma opção incorrecta;
- mais do que uma opção.

Não há lugar a classificações intermédias.

Os critérios de classificação dos itens de construção apresentam-se organizados por etapas e/ou por níveis de desempenho. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação. No caso de, ponderados todos os dados contidos nos descritores, permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

Nos itens de construção com cotação igual ou superior a quinze pontos e que impliquem a produção de um texto, a classificação a atribuir traduz a avaliação simultânea das competências específicas da disciplina e das competências de comunicação escrita em língua portuguesa. A avaliação das competências de comunicação escrita em língua portuguesa contribui para valorizar a classificação atribuída ao desempenho no domínio das competências específicas da disciplina. Esta valorização é cerca de 10% da cotação do item e faz-se de acordo com os níveis de desempenho descritos no quadro seguinte.

Níveis	Descritores
3	Composição bem estruturada, sem erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, ou com erros esporádicos, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
2	Composição razoavelmente estruturada, com alguns erros de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade não implique perda de inteligibilidade e/ou de sentido.
1	Composição sem estruturação aparente, com erros graves de sintaxe, de pontuação e/ou de ortografia, cuja gravidade implique perda frequente de inteligibilidade e/ou de sentido.

No caso de a resposta não atingir o nível 1 de desempenho no domínio específico da disciplina, a classificação a atribuir é zero pontos. Neste caso, não é classificado o desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa.

Havendo escolas em que os examinandos já contactam com as novas regras ortográficas, uma vez que o Acordo Ortográfico de 1990 já foi ratificado e dado que qualquer cidadão, nesta fase de transição, pode optar pela ortografia prevista quer no Acordo de 1945, quer no de 1990, são consideradas correctas, na classificação das provas, as grafias que seguirem o que se encontra previsto em qualquer um destes normativos.

Nos itens de construção, as respostas que apresentem pontos de vista diferentes dos mencionados nos critérios específicos de classificação devem ser classificadas segundo procedimentos análogos aos previstos nos descritores apresentados, desde que o conteúdo dessas respostas seja considerado cientificamente válido e adequado ao solicitado.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar em situações não descritas anteriormente.

Situação	Classificação
1. Classificação da resposta a um item cujo critério se apresenta organizado por etapas.	A pontuação indicada para cada etapa é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A classificação da resposta resulta da soma das pontuações das diferentes etapas, à qual se subtrai ou subtraem, eventualmente, um ou dois pontos, de acordo com o previsto nas situações 14 e/ou 19.
2. Pontuação de uma etapa dividida em passos.	A pontuação indicada para cada passo é a pontuação máxima que lhe é atribuível. A pontuação da etapa resulta da soma das pontuações dos diferentes passos.
3. Classificação da resposta a um item ou pontuação de uma etapa cujo critério se apresenta organizado por níveis de desempenho.	A resposta é enquadrada numa das descrições apresentadas. À classificação/pontuação correspondente subtraem-se, eventualmente, um, dois ou três pontos, de acordo com o previsto nas situações 9, 10 e/ou 19.
4. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite e classificado qualquer processo de resolução cientificamente correcto. O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado, mediante distribuição da cotação do item pelas etapas* percorridas pelo examinando. Esta adaptação do critério deve ser utilizada em todos os processos de resolução análogos.
5. Apresentação apenas do resultado final, embora a resolução do item exija cálculos e/ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
6. Utilização de processos de resolução que não respeitam as instruções dadas [exemplo: «usando métodos analíticos»].	A etapa em que a instrução não é respeitada é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário, no critério específico de classificação.
7. Ausência de apresentação dos cálculos e/ou das justificações necessárias à resolução de uma etapa*.	A etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam, salvo se houver indicação em contrário, no critério específico de classificação.
8. Ausência de apresentação explícita de uma dada etapa.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, a mesma é pontuada com a cotação total para ela prevista.

Situação	Classificação
9. Transposição incorrecta de dados do enunciado.	Se o grau de dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se o grau de dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
10. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre.
11. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades.	A pontuação máxima a atribuir nessa etapa deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
12. Ocorrência de um erro na resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada de acordo com o erro cometido. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido: – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; – se o grau de dificuldade das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
13. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas o passo final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da cotação prevista.
14. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação de um arredondamento incorrecto.	É subtraído um ponto à classificação da resposta, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
15. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplos: é pedido o resultado na forma de fracção, e a resposta apresenta-se na forma de dízima; é pedido o resultado em centímetros, e a resposta apresenta-se em metros].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final [exemplo: «15» em vez de «15 metros»].	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a cotação para ela prevista.
17. Apresentação do resultado final com aproximação, quando deveria ter sido apresentado o valor exacto.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
18. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado e/ou apresentação do resultado final incorrectamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
19. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorrectas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à classificação da resposta, excepto: – se as incorrecções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

* Em situações em que o critério é aplicável tanto a **etapas** como a **passos**, utiliza-se apenas o termo «etapas» por razões de simplificação da apresentação.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

As respostas correctas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
	D	A	C	B	D	A	A	C

GRUPO II

É de aceitar qualquer processo de resolução cientificamente correcto, ainda que não esteja previsto nestes critérios específicos, nem no Programa (ver n.º 4 dos critérios gerais).

1.1. **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Resolver a equação $z^2 + z + 1 = 0$ 6 pontos

Escrever $z^2 + z + 1 = 0$ 1 ponto

Escrever $z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$ 1 ponto

Obter $z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ 2 pontos

Obter $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 1 ponto

Obter $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 1 ponto

Identificar w 1 ponto

Escrever w na forma trigonométrica 4 pontos

Indicar o valor de $|w|$ 2 pontos

Indicar um argumento de w 2 pontos

Escrever $\frac{1}{w}$ na forma trigonométrica 4 pontos

Indicar o valor de $\left| \frac{1}{w} \right|$ 1 ponto

Indicar um argumento de $\frac{1}{w}$ 2 pontos

Obter $\frac{1}{w}$ na forma trigonométrica 1 ponto

2.º Processo

Resolver a equação $z^2 + z + 1 = 0$	6 pontos
Escrever $z^2 + z + 1 = 0$	1 ponto
Escrever $z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$	1 ponto
Obter $z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$	2 pontos
Obter $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	1 ponto
Obter $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$	1 ponto
Identificar w	1 ponto
Escrever $\frac{1}{w}$ na forma algébrica	4 pontos
Multiplicar ambos os termos da fracção por $(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$ (ou equivalente)	1 ponto
Obter $\frac{1}{w}$ na forma algébrica	3 pontos
Escrever $\frac{1}{w}$ na forma trigonométrica	4 pontos
Indicar o valor de $ \frac{1}{w} $	1 ponto
Indicar um argumento de $\frac{1}{w}$	2 pontos
Obter $\frac{1}{w}$ na forma trigonométrica	1 ponto

1.2. 15 pontos

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Considerar $z = a + bi$	
Substituir z por $a + bi$ na expressão $(\bar{z} + i)(z - i)$	1 ponto
Substituir \bar{z} por $a - bi$ na expressão $(\bar{z} + i)(z - i)$	1 ponto
Utilizar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição	3 pontos
Substituir i^2 por -1	1 ponto
Obter $a^2 + b^2 - 2b + 1$ (ou equivalente)	2 pontos
Substituir z por $a + bi$ na expressão $ z - i ^2$	1 ponto
Escrever $ a + i(b - 1) ^2$ (ou equivalente)	2 pontos
Obter $a^2 + (b - 1)^2$ (ou equivalente)	2 pontos
Concluir o pretendido	2 pontos

2.º Processo

- Escrever $|z - i|^2 = \overline{(z - i)}(z - i)$ 5 pontos
- Escrever $\overline{(z - i)} = \bar{z} - \bar{i}$ 4 pontos
- Escrever $\bar{z} - \bar{i} = \bar{z} + i$ 4 pontos
- Concluir o pretendido 2 pontos

2.1. 10 pontos

- Escrever a expressão que dá o valor pedido (**ver nota 1**) 8 pontos
- Calcular o valor pedido (**ver nota 2**) 2 pontos

Notas:

1. Indicam-se a seguir possíveis respostas do examinando, no que respeita à escrita da expressão, e a pontuação a atribuir em cada caso.

$\frac{4 \times {}^{11}A_3}{{}^{12}A_4}$ ou $\frac{{}^{11}C_3}{{}^{12}C_4}$ (ou equivalente) 8 pontos

$\frac{{}^{11}A_3}{{}^{12}A_4}$ (ou equivalente) 6 pontos

$\frac{4}{{}^{12}A_4}$ (ou equivalente) 4 pontos

Outras fracções próprias com denominador ${}^{12}A_4$ ou ${}^{12}C_4$ 2 pontos

Outras situações 0 pontos

2. A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se o resultado estiver de acordo com a expressão escrita pelo examinando e se essa expressão não tiver sido pontuada com zero pontos.

2.2. 15 pontos

- Indicar os valores que a variável X pode tomar 2 pontos
- Calcular a probabilidade de cada um dos valores da variável $X \dots (3 + 3 + 3 + 3) \dots$ 12 pontos
- Apresentar a tabela de distribuição de probabilidades (**ver nota**) 1 ponto

Nota – A pontuação relativa a esta etapa só pode ser atribuída se a etapa anterior não tiver sido pontuada com zero pontos.

2.3. 15 pontos

A composição deverá contemplar os pontos seguintes:

- A) referir o significado de $P(J|I)$ no contexto da situação descrita
- B) referir que a probabilidade pedida é $\frac{3}{4}$
- C) referir que a soma dos números registados nos quatro lançamentos do tetraedro só é menor do que 10, se, no 4.º lançamento, sair 1, ou sair 2, ou sair 3

Na tabela seguinte, indica-se como deve ser classificada a resposta a este item, de acordo com os níveis de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa e os níveis de desempenho no domínio específico da disciplina.

Descritores do nível de desempenho no domínio específico da disciplina		Descritores do nível de desempenho no domínio da comunicação escrita em língua portuguesa	Níveis*		
			1	2	3
Níveis	4	A composição contempla correctamente os pontos A, B e C.	13	14	15
	3	A composição contempla correctamente apenas os pontos A e B, OU apenas os pontos B e C, OU apenas os pontos A e C.	9	10	11
	2	A composição contempla correctamente apenas o ponto A, OU apenas o ponto C.	5	6	7
	1	A composição contempla correctamente apenas o ponto B.	3	3	3

* Descritores apresentados nos Critérios Gerais de Classificação.

3.1. 15 pontos

Resolver a equação $M = 7,1$ 8 pontos

Escrever $\frac{2}{3}\log_{10}(E) - 2,9 = 7,1$ (ou equivalente) 2 pontos

Escrever $\log_{10}(E) = \frac{30}{2}$ (ou equivalente) 2 pontos

Obter $E = 10^{15}$ (ou equivalente) 4 pontos

Resolver a equação $M_0 \times 1,6 \times 10^{-5} = 10^{15}$ 5 pontos

Escrever $M_0 \times 1,6 \times 10^{-5} = 10^{15}$ (ou equivalente) 2 pontos

Escrever $M_0 = \frac{10^{20}}{1,6}$ (ou equivalente) 3 pontos

Indicar o valor de M_0 na forma pedida 2 pontos

3.2. 15 pontos

Escrever $M_1 - M_2 = \frac{2}{3}$ (ou equivalente) 2 pontos

Escrever $\frac{2}{3}\log_{10}(E_1) - 2,9 - \frac{2}{3}\log_{10}(E_2) + 2,9 = \frac{2}{3}$ (ou equivalente) 2 pontos

Escrever $\frac{2}{3}(\log_{10}(E_1) - \log_{10}(E_2)) = \frac{2}{3}$ (ou equivalente) 2 pontos

Escrever $\log_{10}(E_1) - \log_{10}(E_2) = 1$ (ou equivalente) 1 ponto

Obter $\log_{10}\left(\frac{E_1}{E_2}\right) = 1$ 3 pontos

Obter $\frac{E_1}{E_2} = 10$ 3 pontos

Concluir o pretendido 2 pontos

4.1. 15 pontos

Referir que, se f é contínua em $x = 1$, então $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$ (ver nota 1)..... 3 pontos

Calcular $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 10 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(k + \frac{1 - e^{x-1}}{x-1} \right)$ 1 ponto

Levantar a indeterminação 6 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow 1^-} k + \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{-(e^{x-1} - 1)}{x-1} \right)$ (ou equivalente) 2

Escrever $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(e^{x-1} - 1)}{x-1} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{-(e^y - 1)}{y}$ (ver nota 2).. 3

Referir o limite notável $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$ (ou equivalente) .. 1

Obter o valor de $\lim_{x \rightarrow 1^-} k + \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{-(e^{x-1} - 1)}{x-1} \right)$ 3 pontos

Calcular k 2 pontos

Calcular $f(1)$ 1 ponto

Obter o valor de k 1 ponto

Notas:

1. Se o examinando referir que, se f é contínua em $x = 1$, então $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ é igual a $f(1)$, a pontuação a atribuir, nesta etapa, não deve ser desvalorizada.
2. Se o examinando referir que $x \rightarrow 1^-$ é equivalente a $x - 1 \rightarrow 0^-$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

4.2. 15 pontos

Estudar a função f quanto à existência de assíntotas horizontais do seu gráfico quando x tende para $+\infty$

Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 8 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + \ln x)$ 1 ponto

Levantar a indeterminação 5 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(-1 + \frac{\ln x}{x} \right) \right)$ 4

Referir o limite notável $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ 1

Obter o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 2 pontos

Concluir que o gráfico de f não tem assíntota horizontal quando x tende para $+\infty$ 2 pontos

Estudar a função f quanto à existência de assíntotas horizontais do seu gráfico quando x tende para $-\infty$

Calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 3 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + \frac{1 - e^{x-1}}{x-1} \right)$ 1 ponto

Obter o valor de $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 2 pontos

Concluir que a recta de equação $y = 3$ é assíntota horizontal do gráfico de f quando x tende para $-\infty$ 2 pontos

5. 15 pontos

Determinar g' 3 pontos

Determinar $(x)'$ 1 ponto

Determinar $(\cos x)'$ 1 ponto

Obter a expressão de $g'(x)$ 1 ponto

Relacionar os zeros de g' com a existência de extremos relativos de g (**ver nota**) .. 8 pontos

Referir que o domínio é um intervalo aberto 1 ponto

Referir que a função é derivável em todos os pontos de $\left] -\pi, \frac{\pi}{2} \right[\dots$ 1 ponto

Referir que as abcissas dos pontos C e D são zeros de g' 2 pontos

Escrever $g'(x) = 0$ 1 ponto

Resolver a equação $g'(x) = 0$ 2 pontos

Referir que a equação tem exactamente duas soluções em $\left] -\pi, \frac{\pi}{2} \right[$ 1 ponto

Indicar as coordenadas de C 2 pontos

Indicar a abcissa 1 ponto

Indicar a ordenada 1 ponto

Indicar as coordenadas de D 2 pontos

Indicar a abcissa 1 ponto

Indicar a ordenada 1 ponto

Nota – Se o examinando estudar o sinal de g' com recurso a um quadro, a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser distribuída do seguinte modo:

Preencher a primeira linha do quadro (relativa à variável x , de acordo com o domínio da função) 1 ponto

Indicar o sinal de g' 6 pontos

Escrever $g'(x) = 0$ 1

Resolver a equação $g'(x) = 0$ 2

Concluir que $g'(x) > 0$ se $x \in \left] -\pi, -\frac{5\pi}{6} \right[$ 1

Concluir que $g'(x) < 0$ se $x \in \left] -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} \right[$ 1

Concluir que $g'(x) > 0$ se $x \in \left] -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right[$ 1

Relacionar o sinal de g' com a monotonia de g 1 ponto

6. **15 pontos**

Escrever a expressão que dá a área do rectângulo $[OACB]$ em função da abcissa do ponto A 7 pontos

Indicar que a área é $\overline{OA} \times \overline{OB}$ (ou equivalente)..... 3 pontos

Indicar $\overline{OA} = x$ 2 pontos

Indicar $\overline{OB} = f(x)$ 2 pontos

Reproduzir o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora (**ver notas 1 e 2**) 4 pontos

Indicar a abcissa do ponto A na forma pedida 4 pontos

Notas:

1. Se o examinando apresentar um gráfico que não respeite o domínio da função que exprime a área do rectângulo $[OACB]$ em função da abcissa do ponto A , a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser desvalorizada em 1 ponto.
2. Se o examinando não apresentar o referencial, a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser desvalorizada em 1 ponto.