Sociedade Portuguesa de Matemática
Av. da República 45, 3º esq., 1050 – 187 Lisboa
Tel. 21 795 1219 / Fax 21 795 2349
www.spm.pt imprensa@spm.pt

Proposta de Resolução da Sociedade Portuguesa de Matemática para o Exame Nacional de Matemática A

Prova 635, 2ª fase 16 de Julho de 2012

Grupo I

	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	A	C	B	A	D	B	D	B
Versão 2	C	A	D	D	A	C	B	D

Grupo II

1.1.

$$\frac{\sqrt{3}\times i^{4n-6}+2cis\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{2cis\left(\frac{\pi}{5}\right)}=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{3}-i}{2cis\left(\frac{\pi}{5}\right)}=\frac{-i}{2cis\left(\frac{\pi}{5}\right)}=\frac{cis\left(\frac{3}{2}\pi\right)}{2cis\left(\frac{\pi}{5}\right)}=\frac{1}{2}cis\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}cis\left(\frac{13}{10}\pi\right)$$

Cálculo auxiliar 1:

$$i^{4n-6}=\left(i^4\right)^n\cdot i^{-6}=1\times\frac{1}{i^6}=\frac{1}{i^4\times i^2}=\frac{1}{1\times(-1)}=-1$$

Cálculo auxiliar 2:

$$2cis\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+isen\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=\sqrt{3}-i$$

1.2. $\alpha\in\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$

$$z_1+z_2=cis\alpha+cis\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=cis\alpha+icis\alpha=(1+i)cis\alpha=\left(\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)cis\alpha\right)=\sqrt{2}cis\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$$

Como $\alpha\in\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ vem que $\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right[$, pelo que $\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\in 2.^{o}Q$ e, assim, a imagem geométrica de z_1+z_2 pertence ao $2.^{o}Q$.

Cálculo auxiliar 1:

$$cis\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=cis\alpha\times cis\left(\frac{\pi}{2}\right)=icis\alpha$$

Cálculo auxiliar 2:

$1+i=\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$, pois $\rho=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ e $tg\vartheta=1 \wedge \vartheta\in 1^{\text{o}}Q \Leftrightarrow \vartheta=\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in \mathbb{Z}$.

2)

2.1) Seja A:" pacotes de açúcar que estão em condições de serem comercializados".

Sabe-se que:

$$\mu=6{,}5$$
$$\sigma=0{,}4 \text{ e}$$
$$Y\to N(6{,}5;0{,}4)$$

$$P(A)=P(y\in]5{,}7;7{,}3[)=P(y\in]\mu-2\sigma,\mu+2\sigma[\approx 0{,}9545$$

Assim,

$$P(\overline{A})=1-P(A)\approx 0{,}0455.$$

A probabilidade pedida é dada, aproximadamente, por:

$^{10}C_8\times 0{,}9545^8\times 0{,}0455^2\approx 0{,}064.$

2.2)

Na primeira resposta apresentada utilizou-se o raciocínio do acontecimento contrário, ou seja, de todos os casos possíveis que são $^{500}C_{30}$ (dos 500 funcionários escolhem-se quaisquer 30 para formarem um grupo) retiram-se os casos em que as duas irmãs fazem parte do grupo (escolhem-se as duas irmãs e depois dos restantes 498 funcionários escolhem-se 28 para formarem um grupo de 30 elementos).

Na segunda resposta apresentada considerou-se os dois casos disjuntos que satisfazem o problema, que são:

- uma e uma só irmã é escolhida e, assim, das duas irmãs escolhe-se uma e dos restantes 498 funcionários escolhem-se 29 $\left(2\times{}^{498}C_{29}\right)$ para formarem um grupo de 30 elementos.
- nenhuma irmã é escolhida e, assim, dos restantes 498 funcionários escolhem-se 30 $\left({}^{498}C_{30}\right)$ para formarem um grupo de 30 elementos.

Como já se disse anteriormente os casos são disjuntos pelo que a resposta final é dada por:

$$2\times{}^{498}C_{29}+{}^{498}C_{30}.$$

3.

$P(B) \neq 0$

$$P\left(\overline{A \cap B} \mid B\right) + P(A \mid B) = \frac{P\left(\overline{A \cap B} \cap B\right)}{P(B)} + \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P\left(\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cap B\right) + P(A \cap B)}{P(B)} =$$

$$= \frac{P\left(\left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(\overline{B} \cap B\right)\right) + P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P\left(\left(\overline{A} \cap B\right) \cup \phi\right) + P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P\left(\overline{A} \cap B\right) + P(A \cap B)}{P(B)} =$$

$$obs.: \quad \left[\left(\overline{A} \cap B\right) \cap (A \cap B) = \phi\right]$$

$$= \frac{P\left(\left(\overline{A} \cap B\right) \cup (A \cap B)\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\left(\overline{A} \cup A\right) \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P(E \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1 \ \ c.q.d$$

4.

4.1.

$f(0) = 1 - e^{k+1}$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - e^{4x}}{x} = -4 \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{4x} - 1}{4x} = -4 \times 1 = -4$$

$$\therefore\ 1 - e^{k+1} = -4 \Leftrightarrow e^{k+1} = 5 \Leftrightarrow k + 1 = \ln 5 \Leftrightarrow k = \ln 5 - 1$$

4.2) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -4$ (já calculado em 4.1.) pelo que o gráfico não tem A.V. quando $x \to 0^+$.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{senx}{1 - \sqrt{1 - x^3}} = \lim_{x \to 0^-}\left(\frac{senx}{x} \times \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x^3}}\right) = \lim_{x \to 0^-} \frac{senx}{x} \times \lim_{x \to 0^-} \frac{x\left(1 + \sqrt{1 - x^3}\right)}{\left(1 - \sqrt{1 - x^3}\right)\left(1 + \sqrt{1 - x^3}\right)} =$$

$$= 1 \times \lim_{x \to 0^-} \frac{x\left(1 + \sqrt{1 - x^3}\right)}{1 - \left(1 - x^3\right)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x\left(1 + \sqrt{1 - x^3}\right)}{x^3} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1 + \sqrt{1 - x^3}}{x^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Assim, o gráfico de f tem uma A.V., quando $x \to 0^-$ cuja equação é $x = 0$.

O gráfico de f não tem mais A.V. pois f é contínua em $IR \setminus \{0\}$.

4.3.

$$g'(x) = \frac{1 - e^{4x}}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{e^{4x}}{x}, \forall x \in IR^+$$

$$g''(x) = \frac{\left(-e^{4x}\right)' x - x'\left(-e^{4x}\right)}{x^2} = \frac{-4xe^{4x} + e^{4x}}{x^2} = \frac{e^{4x}(1 - 4x)}{x^2}, \forall x \in IR^+$$

$$g''(x)=0 \ \wedge x>0 \Leftrightarrow \left(\underbrace{e^{4x}=0}_{impossível} \ \vee \ 1-4x=0 \right) \wedge x>0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$$

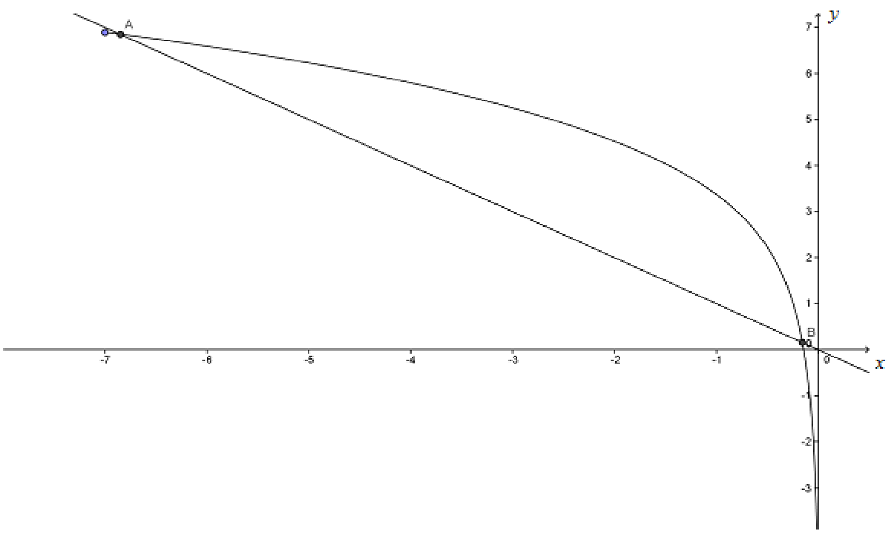
x	0		$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$g''(x)$	n.d.	$+$	0	$-$
$g(x)$	n.d.	$\cup$	P.I.	$\cap$

O gráfico de g tem um ponto de inflexão em $x=\frac{1}{4}$.

O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $\left]0, \frac{1}{4}\right]$ e para baixo em $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$.

5)

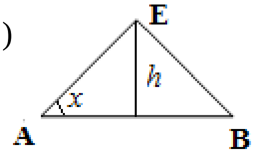
$A(-6{,}85; 6{,}85)$ e $B(-0{,}16; 0{,}16)$



$$d=\overline{AB}=\sqrt{(-6{,}85+0{,}16)^2+(6{,}85-0{,}16)^2}=6{,}69\sqrt{2}\approx 9{,}46$$

6)

6.1.)



$$\frac{h}{2} = tgx \Leftrightarrow h = 2tgx,\ x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$$

$$a(x) = 4^2 - 4 \times \frac{4 \times 2tgx}{2} = 16 - 16tgx = 16(1 - tgx)\ ,\ x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\ .$$

6.2) a é contínua em $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{5}\right]$, pois a função tangente é contínua em $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ $\left(\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{5}\right] \subset \left]0, \frac{\pi}{4}\right[\right)$.

$$a\left(\frac{\pi}{12}\right) = 16\left(1 - tg\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) \approx 11{,}71$$

$$a\left(\frac{\pi}{5}\right) = 16\left(1 - tg\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) \approx 4{,}38$$

Logo, como $5 \in \left]a\left(\frac{\pi}{5}\right), a\left(\frac{\pi}{12}\right)\right[$, pelo Teorema de Bolzano vem que:

$\exists c \in \left]\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{5}\right[: a(c) = 5$.