Associação de Professores de Matemática
Contactos:
Rua Dr. João Couto, n.º 27-A
1500-236 Lisboa
Tel.: +351 21 716 36 90 / 21 711 03 77
Fax: +351 21 716 64 24
http://www.apm.pt
email: geral@apm.pt

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA A DO ENSINO SECUNDÁRIO

(CÓDIGO DA PROVA 635) – 1ª FASE – 25 DE JUNHO 2013

Grupo I

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	B	D	C	A	D	B	C	A
Versão 2	C	A	B	D	D	C	B	B

Grupo II

1.

1.1.

$$z_1 = \sqrt{2} + 2\,\text{cis}\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} + 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{2}i = \sqrt{2}i = \sqrt{2}\,\text{cis}\frac{\pi}{2}$$

$$z_2 = 1 + i = \sqrt{2}\,\text{cis}\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}\,\text{cis}\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2}\,\text{cis}\frac{\pi}{4}} = \text{cis}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \text{cis}\frac{\pi}{4}$$

$$w = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^4 = \left(\text{cis}\frac{\pi}{4}\right)^4 = \text{cis}\,\pi = -1$$

1.2.

$$z_3 + \overline{z_2} = \text{cis}\,\alpha + 1 - i = \cos\alpha + 1 + (\text{sen}\,\alpha - 1)i$$

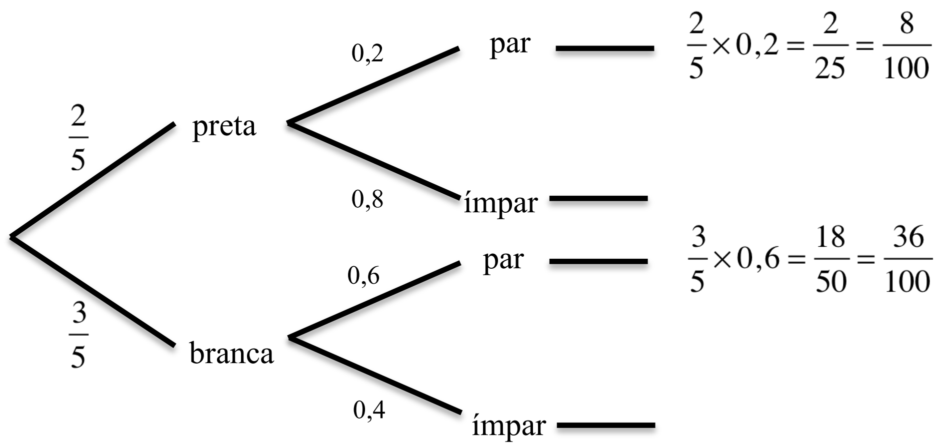
$z_3 + \overline{z_2}$ é um número real se $\text{sen}\,\alpha - 1 = 0$. Como $\alpha \in \left]-2\pi, -\pi\right[$ então $\alpha = -\frac{3\pi}{2}$.

2.

2.1.

Consideremos o seguinte diagrama em que:

preta é o acontecimento "a bola ser preta" e **branca** "a bola ser branca". **par** "a bola ter um número par" e **ímpar** "a bola ter um número ímpar".



Assim,

$$P(preta \mid par)=\frac{P(preta \text{ e } par)}{P(par)}=\frac{\frac{8}{100}}{\frac{8}{100}+\frac{36}{100}},$$

pelo que a probabilidade dada é de $\frac{2}{11}$.

2.2.

A probabilidade de sair uma bola branca na primeira extração é igual a $\frac{3}{5}$ segundo os dados do problema. Como a extração é efetuada sem reposição, a probabilidade de sair uma bola branca na segunda extração, sabendo que saiu bola branca na primeira extração é dada por: $\frac{\frac{3}{5}n-1}{n-1}$

Logo, a probabilidade de ambas as bolas serem brancas é dada por: $\frac{3}{5}\times\frac{\frac{3}{5}n-1}{n-1}=\frac{\frac{9}{5}n-3}{5n-5}$.

Como se sabe que a probabilidade de ambas as bolas serem brancas é igual a $\frac{7}{20}$ tem-se: $\frac{\frac{9}{5}n-3}{5n-5}=\frac{7}{20}$. Resolvendo a equação obtém-se $n=25$.

3.

De $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=\dfrac{15}{16}$, temos sucessivamente que

$$P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=\frac{15}{16}\Leftrightarrow P\left(\overline{A\cap B}\right)=\frac{15}{16}\Leftrightarrow 1-P\left(A\cap B\right)=\frac{15}{16}\Leftrightarrow P\left(A\cap B\right)=\frac{1}{16}.$$

Atendendo a que se $P(B)=\dfrac{1}{4}$ então $P\left(\overline{B}\right)=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$.

De $P\left(A\,|\,\overline{B}\right)=\dfrac{7}{12}$, temos sucessivamente que

$$P\left(A\,|\,\overline{B}\right)=\frac{7}{12}\Leftrightarrow\frac{P\left(A\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)}=\frac{7}{12}\Leftrightarrow P\left(A\cap\overline{B}\right)=\frac{3}{4}\times\frac{7}{4\times 3}\Leftrightarrow P\left(A\cap\overline{B}\right)=\frac{7}{16}.$$

Sabendo que $P(A)=P(A\cap B)+P\left(A\cap\overline{B}\right)$, então $P(A)=\dfrac{1}{16}+\dfrac{7}{16}=\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{2}$.

4.

4.1.

Como *f* é contínua no seu domínio só a reta de equação $x=0$ poderá ser assíntota vertical do gráfico de *f*. Para $x\in\left]-\infty,0\right[$, *f* é contínua por ser o quociente entre duas funções contínuas e para $x\in\left]0,+\infty\right[$ *f* é contínua por ser o produto de duas funções contínuas. Assim, teremos que calcular:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-}f(x)&=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{e^{4x}-1}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{e^x-1}{x}\times\frac{x}{e^{4x}-1}\right)\\&=\underbrace{\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}}_{\text{limite notável=1}}\times\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{4x}-1}=1\times\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{\frac{e^{4x}-1}{x}}\\&=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{4\left(e^{4x}-1\right)}{4x}}\underset{y=4x}{=}\frac{1}{4\times\underbrace{\lim\limits_{y\to 0^-}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{limite notável=1}}}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x\ln(x)\right)\underset{y=\frac{1}{x}}{=}\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{1}{y}\right)}{y}=-\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)}{y}=0$$

Concluímos, assim, que o gráfico da função *f* não tem assíntotas verticais.

4.2.

$g(x) = f(x) - x + \ln^2 x$, substituindo $f(x)$ por $x\ln(x)$, temos $g(x) = x\ln(x) - x + \ln^2 x$.

Determinemos a primeira derivada da função *g*:

$$g'(x) = (x\ln(x))' + (\ln^2(x))' = 1 \times \ln(x) + \frac{x}{x} - 1 + 2\ln(x) \times \frac{1}{x}$$
$$= \ln(x) + \frac{2}{x}\ln(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)\ln(x)$$

Determinemos os zeros de g' no intervalo $]0,e]$:

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{2}{x}\right)\ln(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x} = 0 \vee \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$. No intervalo considerado $x = 1$ é o único zero de g'.

x	0	1		e
$g'(x)$	$-$	0	$+$	$1+\frac{2}{e}$
$g(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1
		mín		máx

A função *g* é estritamente decrescente em $]0,1]$ e estritamente crescente em $[1,e]$.

g tem um mínimo relativo igual a -1 para $x = 1$ e um máximo relativo igual a 1 para $x = e$.

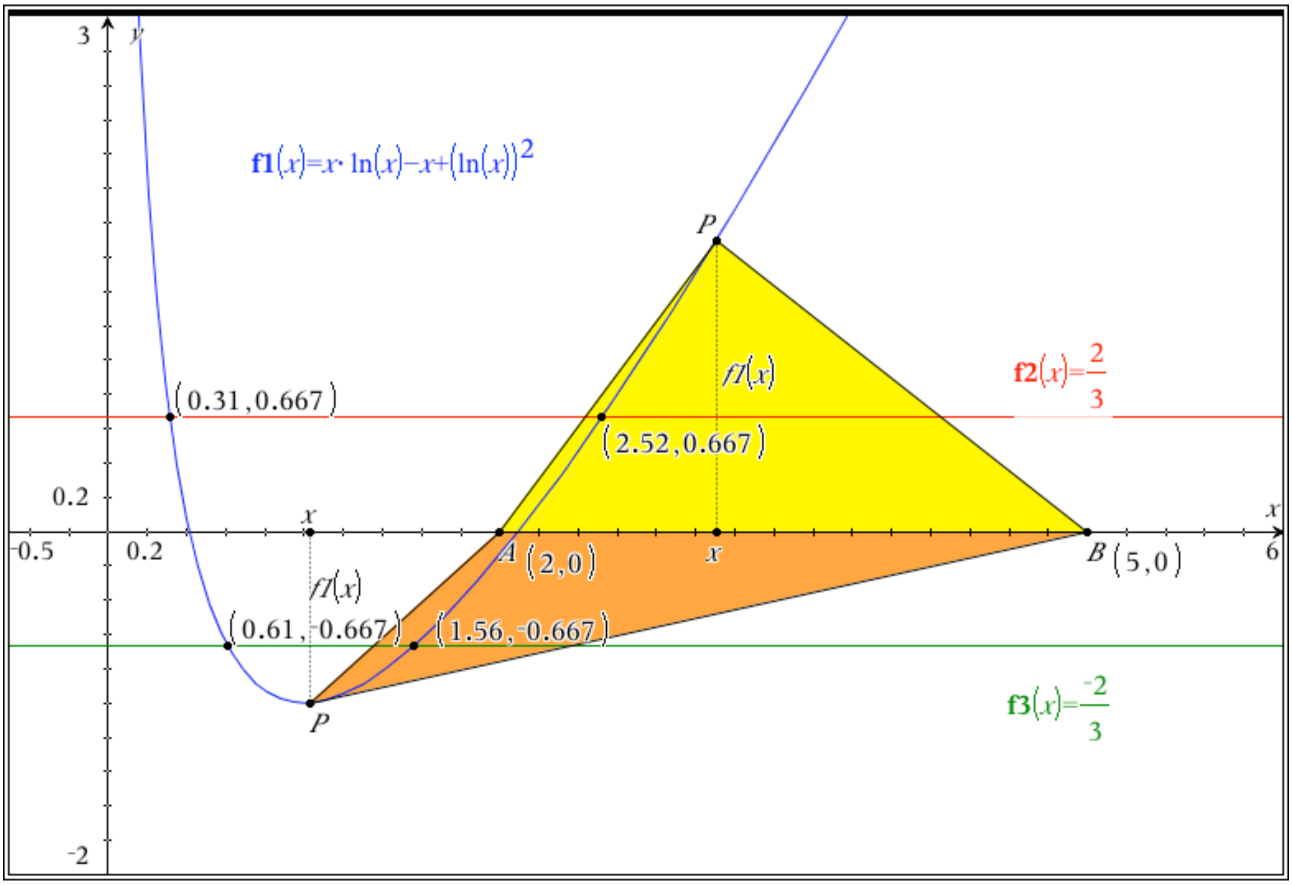
4.3.

Pretendemos os valores de $x \in \mathbb{R}^+$, para os quais a área do triângulo $[ABP]$ é a 1. Assim, temos de determinar *x* tal que $\frac{(5-2) \times |g(x)|}{2} = 1 \Leftrightarrow |g(x)| = \frac{2}{3} \Leftrightarrow g(x) = \frac{2}{3} \vee g(x) = -\frac{2}{3}$.

Com recurso à calculadora obteve-se os gráficos de *g* e das retas $y = \frac{2}{3}$ e $y = -\frac{2}{3}$.

Procurando os pontos de interseção do gráfico da função *g* com as retas $y = \frac{2}{3}$ e $y = -\frac{2}{3}$, vamos encontrar as soluções do problema.

Vejamos os gráficos:



Por observação do gráfico podemos afirmar que as abcissas dos pontos P, são: $x=0{,}31 \vee x=0{,}61 \vee x=1{,}56 \vee x=2{,}52$.

5.

Do enunciado da questão podemos construir a tabela de monotonia da função *g*:

Dado que $e^{-x}>0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos que:

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

A opção que pode representar a função *g* é a IV.

Na opção I a representação gráfica não se adequa à situação descrita no ponto de abcissa -1 porque a derivada nesse ponto é negativa e de acordo com a tabela anterior $g'(-1)=0$.

Rejeitamos a opção II porque apresenta um máximo relativo para $x=2$ quando para este valor a função *g* tem um mínimo relativo, conforme pode ser constatado na tabela.

Por fim, a opção III é rejeitada porque $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-2\right]=0$ o que significa que a reta de equação $y=2$ é assíntota do gráfico de *g*, e nesta representação gráfica a assíntota é a reta de equação $y=-2$.

6.

Como a reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa a é paralela à reta de equação $y=\frac{1}{2}x+1$, então o seu declive é igual a $\frac{1}{2}$.

Dado que a derivada de uma função num ponto é igual ao declive da reta tangente ao gráfico nesse ponto, temos que determinar a tal que $g'(a)=\frac{1}{2}$.

Determinemos a expressão analítica da função derivada de g:

$g'(x)=2\cos(2x)+\operatorname{sen}(x)$.

Vamos, então, resolver a equação $g'(a)=\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
g'(a)=\frac{1}{2} &\Leftrightarrow 2\cos(2a)+\operatorname{sen}(a)=\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow 2\left(\cos^2(a)-\operatorname{sen}^2(a)\right)+\operatorname{sen}(a)=\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow 2\left(1-\operatorname{sen}^2(a)-\operatorname{sen}^2(a)\right)+\operatorname{sen}(a)=\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow 2-4\operatorname{sen}^2(a)+\operatorname{sen}(a)-\frac{1}{2}=0\\
&\Leftrightarrow -4\operatorname{sen}^2(a)+\operatorname{sen}(a)+\frac{3}{2}=0\\
&\Leftrightarrow -8\operatorname{sen}^2(a)+2\operatorname{sen}(a)+3=0
\end{aligned}$$

Considerando $b=\operatorname{sen}(a)$, temos que $-8\operatorname{sen}^2(a)+2\operatorname{sen}(a)+3=0 \Leftrightarrow -8b^2+2b+3=0$, aplicando a fórmula resolvente para equações do 2º grau temos:

$$\begin{aligned}
-8b^2+2b+3=0 &\Leftrightarrow b=\frac{-2\pm\sqrt{4+96}}{-16}\\
&\Leftrightarrow b=\frac{-2\pm 10}{-16}\\
&\Leftrightarrow b=\frac{12}{16}\vee b=\frac{8}{-16}\\
&\Leftrightarrow b=\frac{3}{4}\vee b=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Temos então que $\operatorname{sen}(a)=\frac{3}{4}\vee\operatorname{sen}(a)=-\frac{1}{2}$.

Como o domínio de g é $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$, neste intervalo a função seno é negativa, pelo que a condição $\operatorname{sen}(a)=\frac{3}{4}$ é impossível.

Assim, tem-se

$\operatorname{sen}(a) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(a) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow a = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee a = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Como $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, o valor de a é igual $-\frac{\pi}{6}$.

7.

Consideremos a função g, definida por $g(x) = f(x) - f(x+a)$. Assim, $g(x) = 0$ é equivalente à condição dada, $f(x) = f(x+a)$.

A função g é contínua no intervalo $[-a, 0]$ por ser a diferença de duas funções contínuas nesse intervalo.

Averiguemos se $g(-a) \times g(0) < 0$.

$g(-a) = f(-a) - f(0) = f(a) - f(0)$, pois $f(-a) = f(a)$;

$g(0) = f(0) - f(a) = -f(a) + f(0) = -(f(a) - f(0))$

Como $f(a) > f(0) \Leftrightarrow f(a) - f(0) > 0 \Leftrightarrow g(-a) > 0$.

De igual modo $g(0) = -(f(a) - f(0)) < 0$

Assim, concluímos que $g(-a) \times g(0) < 0$.

Como g é contínua no intervalo $[-a, 0]$ e $g(-a) \times g(0) < 0$, pelo Teorema de Bolzano, a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $]-a, 0[$, o que permite concluir que a condição $f(x) = f(x+a)$ tem, pelo menos, uma solução em $]-a, 0[$.

FIM