GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/Época Especial

15 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2013

Página em branco

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 5, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular:

$\dfrac{\alpha r^2}{2}$ (α *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r *– raio da base;* g *– geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r *– raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ (r *– raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$ $(n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$ $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ $(n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty$ $(p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega \text{ e } B \subset \Omega)$

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}3$
- $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}55$
- A e B são acontecimentos incompatíveis.

Qual é o valor de $P(\overline{A} \cap \overline{B})$?

(A) $0{,}85$

(B) $0{,}25$

(C) $0{,}15$

(D) 0

2. As classificações obtidas pelos alunos de uma escola num teste de Português seguem, aproximadamente, uma distribuição normal, de valor médio $11{,}5$ valores. Vai ser escolhido, ao acaso, um desses testes. Considere os acontecimentos seguintes.

I: «a classificação do teste é superior a 12 valores»

J: «a classificação do teste é superior a $16{,}5$ valores»

K: «a classificação do teste é inferior a 9 valores»

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $P(J) < P(K) < P(I)$

(B) $P(K) < P(I) < P(J)$

(C) $P(I) < P(K) < P(J)$

(D) $P(K) < P(J) < P(I)$

3. Numa turma com 15 raparigas e 7 rapazes, vai ser formada uma comissão com 5 elementos. Pretende-se que essa comissão seja mista e que tenha mais raparigas do que rapazes.

Quantas comissões diferentes se podem formar?

(A) ${}^{15}A_3 + {}^{15}A_4$

(B) ${}^{15}C_3 \times {}^{7}C_2 + {}^{15}C_4 \times 7$

(C) ${}^{15}C_3 \times {}^{7}C_2 \times {}^{15}C_4 \times 7$

(D) ${}^{22}C_3 \times {}^{19}C_2$

4. Seja f uma função cuja derivada, f', de domínio $\mathbb{R}$, é dada por $f'(x) = (4+x)^2$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) O gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$

(B) A função f tem um máximo relativo em $x = -4$

(C) O gráfico da função f não tem pontos de inflexão.

(D) O gráfico da função f tem um ponto de inflexão de coordenadas $\left(-4, f(-4)\right)$

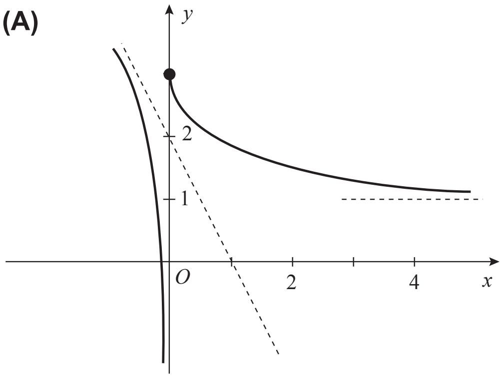
5. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$

Sabe-se que:

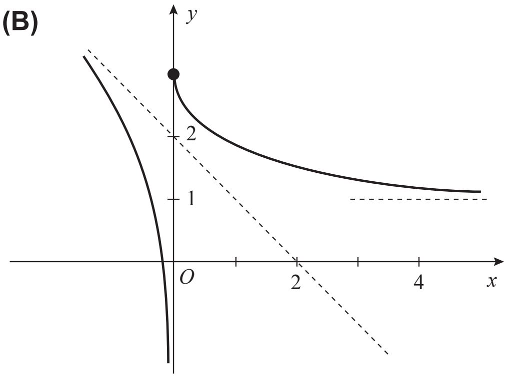
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) + 2x] = 2$

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f ?

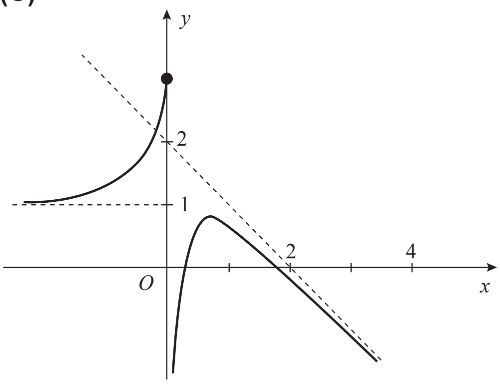
(A)



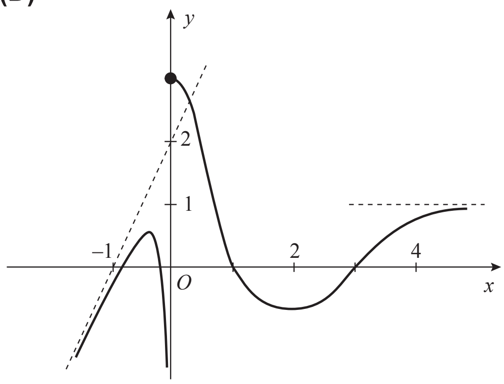
(B)



(C)



(D)



Nota – Em cada uma das opções estão representadas parte do gráfico de uma função e, a tracejado, assíntotas desse gráfico.

6. Seja a um número real positivo.

Considere o conjunto $S = \left\{ x \in \mathbb{R} :\ \ln\left(e^{-x} - a\right) \leq 0 \right\}$

Qual dos conjuntos seguintes é o conjunto S?

(A) $]- \ln(1+a),\ -\ln a[$

(B) $[- \ln(1+a),\ -\ln a[$

(C) $]-\infty,\ -\ln(1+a)]$

(D) $[- \ln(1+a),\ +\infty[$

7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $w = (1+i)^{2013}$

A qual dos conjuntos seguintes pertence w?

(A) $\{ z \in \mathbb{C} : |z| > |z-1| \}$

(B) $\{ z \in \mathbb{C} :\ |z| \leq \sqrt{2} \}$

(C) $\left\{ z \in \mathbb{C} :\ z = \overline{z} \right\}$

(D) $\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) \}$

8. Na Figura 1, estão representadas, no plano complexo, as imagens geométricas dos números complexos: $z,\ z_1,\ z_2,\ z_3$ e z_4

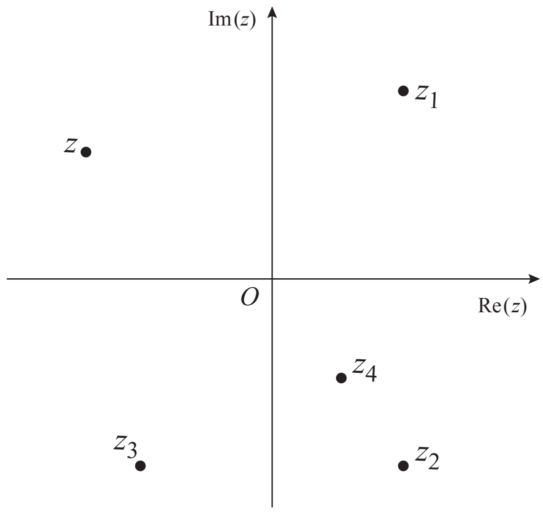


Figura 1

Sabe-se que w é um número complexo tal que $z = i \times \overline{w}$

Qual é o número complexo que pode ser igual a w?

(A) z_4

(B) z_3

(C) z_2

(D) z_1

GRUPO II

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{1+2i\,cis\left(\frac{5\pi}{6}\right)} \quad \text{e} \quad z_2 = \sqrt{2}\,cis\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

1.1. Seja $z = cis\theta$, com θ pertencente a $[0, 2\pi[$

Determine θ de modo que $\frac{z}{z_1}$ seja um número real negativo, sem utilizar a calculadora.

1.2. As imagens geométricas de z_2 e do seu conjugado, $\overline{z_2}$, são vértices consecutivos de um polígono regular. Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das raízes de índice n de um certo número complexo w

Determine w na forma algébrica, sem utilizar a calculadora.

Comece por calcular n

2. Uma empresa produz apenas dois tipos de lâmpadas: lâmpadas fluorescentes e lâmpadas LED (Díodos Emissores de Luz).

As lâmpadas de cada tipo podem ter a forma tubular ou ser compactas.

Sabe-se que:

- 55% das lâmpadas produzidas nessa empresa são fluorescentes;
- das lâmpadas fluorescentes produzidas nessa empresa, 50% têm a forma tubular;
- das lâmpadas LED produzidas nessa empresa, 90% são compactas.

Determine a probabilidade de, ao escolher, ao acaso, uma lâmpada produzida nessa empresa, ela ser fluorescente, sabendo que tem a forma tubular.

Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

3. Num saco estão doze bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 12.

3.1. O João retira três bolas do saco, ao acaso, de uma só vez.

Seja X a variável aleatória *«número de bolas retiradas com um número múltiplo de* 5*»*.

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X

Apresente as probabilidades na forma de fração.

3.2. Considere agora o saco com a sua constituição inicial.

O João retira, ao acaso, uma bola do saco, regista o número da bola retirada e repõe essa bola no saco. Em seguida, retira, ao acaso, uma segunda bola do saco, regista o número da bola retirada e repõe essa bola no saco, e assim sucessivamente, até registar uma série de 8 números.

Considere a afirmação seguinte:

«A probabilidade de o João registar exatamente 5 *números que sejam múltiplos de* 3 *é dada por* $\left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times {}^8C_5$*, aplicando o modelo binomial.»*

Elabore uma composição na qual:

- apresente um raciocínio que justifique a veracidade da afirmação;
- refira as condições de aplicabilidade do modelo binomial.

4. Considere a função f, de domínio $]0, \pi[$, definida por $f(x) = \ln x + \cos x - 1$

Sabe-se que:

- A é um ponto do gráfico de f
- a reta tangente ao gráfico de f, no ponto A, tem inclinação $\frac{\pi}{4}$ radianos.

Determine a abcissa do ponto A, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar a abcissa do ponto A com arredondamento às centésimas.

5. Considere, para um certo número real k positivo, a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x}{1-e^{2x}} & \text{se } x<0\\[2ex] \ln k & \text{se } x=0\\[2ex] \dfrac{x}{2}-\ln\left(\dfrac{6x}{x+1}\right) & \text{se } x>0\end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

5.1. Determine k de modo que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$

5.2. Mostre que $\ln\left(\dfrac{\sqrt{e}}{3}\right)$ é um extremo relativo da função f no intervalo $]0,+\infty[$

6. Considere duas funções g e h, de domínio $\mathbb{R}^+$

Sabe-se que:

- a reta de equação $y=2x-1$ é assíntota do gráfico da função g
- a função h é definida por $h(x)=\dfrac{1-\left[g(x)\right]^2}{x^2}$

Mostre que o gráfico da função h tem uma assíntota horizontal.

7. Na Figura 2, estão representados a circunferência de centro no ponto C e de raio 1, a semirreta $\dot{C}B$, a reta AD e o triângulo $[ACE]$

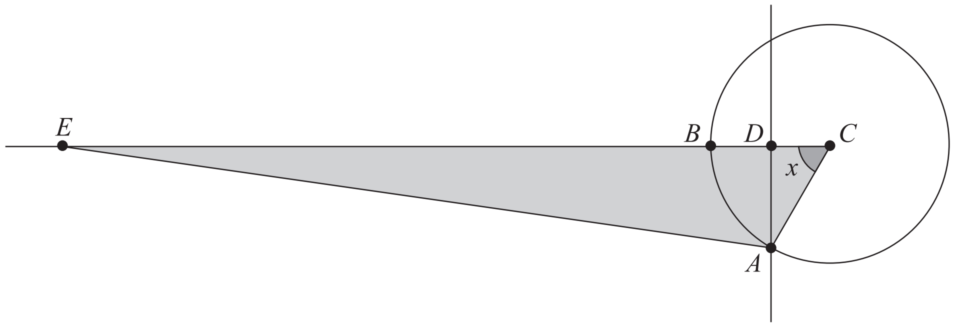


Figura 2

Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem à circunferência;
- os pontos D e E pertencem à semirreta $\dot{C}B$
- a reta AD é perpendicular à semirreta $\dot{C}B$
- o ponto A desloca-se sobre a circunferência, e os pontos D e E acompanham esse movimento de modo que $\overline{DE} = 6$
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo ACB
- $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

7.1. Mostre que a área do triângulo $[ACE]$ é dada, em função de x, por $f(x) = 3 \operatorname{sen} x + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x)$

7.2. Mostre, sem resolver a equação, que $f(x) = 2$ tem, pelo menos, uma solução em $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** (8 × 5 pontos)	40 pontos
	40 pontos

GRUPO II

1.	
1.1.	15 pontos
1.2.	15 pontos
2.	15 pontos
3.	
3.1.	15 pontos
3.2.	15 pontos
4.	15 pontos
5.	
5.1.	15 pontos
5.2.	15 pontos
6.	15 pontos
7.	
7.1.	15 pontos
7.2.	10 pontos
	160 pontos

TOTAL	**200 pontos**