GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA
IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/1.ª Fase 16 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2014

VERSÃO 1

Página em branco

Indique de forma legível a versão da prova.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, e, a seguir, passados a tinta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\dfrac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular:

$\dfrac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- $P(A) = 0{,}4$
- $P(A \cap B) = 0{,}2$
- $P\left(B \mid \overline{A}\right) = 0{,}8$

Qual é o valor de $P(B)$?

(A) $0{,}28$

(B) $0{,}52$

(C) $0{,}68$

(D) $0{,}80$

2. Considere todos os números naturais de dez algarismos que se podem escrever com os algarismos de 1 a 9

Quantos desses números têm exatamente seis algarismos 2?

(A) ${}^{10}C_6 \times 8^4$

(B) ${}^{10}C_6 \times {}^{8}A_4$

(C) ${}^{10}A_6 \times {}^{8}A_4$

(D) ${}^{10}A_6 \times 8^4$

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - 3$

Considere a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

Qual é o valor de $\lim \frac{2}{f(x_n)}$?

(A) $-\infty$

(B) $-e$

(C) 0

(D) $+\infty$

4. Considere, para um certo número real k, a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = k\,e^x + x$

O teorema de Bolzano garante que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]0, 1[$

A qual dos intervalos seguintes pode pertencer k ?

(A) $\left]-e, -\frac{1}{e}\right[$

(B) $\left]-\frac{1}{e}, 0\right[$

(C) $\left]0, \frac{1}{e}\right[$

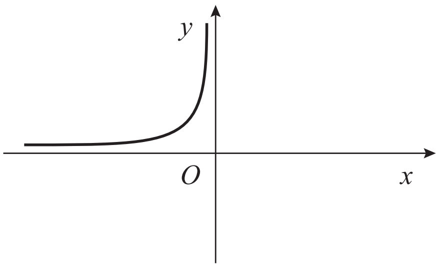
(D) $\left]\frac{1}{e}, 1\right[$

5. Considere, para um certo número real a positivo, a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por

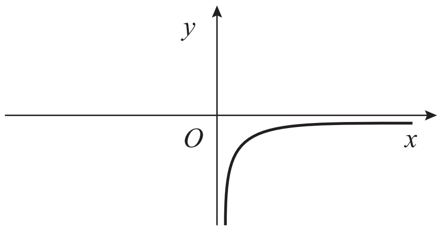
$$f(x) = a + \ln\left(\frac{a}{x}\right)$$

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função f', primeira derivada da função f ?

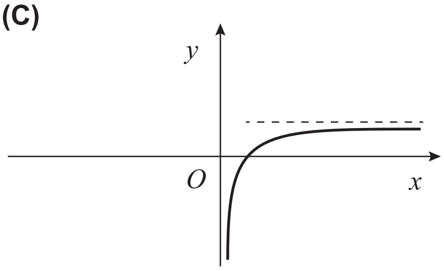
(A)



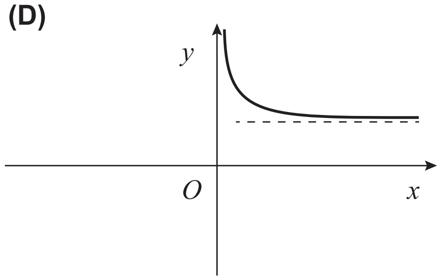
(B)



(C)



(D)



6. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α, definido por $4x - z + 1 = 0$

Seja r uma reta perpendicular ao plano α

Qual das condições seguintes pode definir a reta r ?

(A) $\frac{x}{4} = y \wedge z = -1$

(B) $x = 4 \wedge z = -1$

(C) $x - 3 = \frac{z}{4} \wedge y = 0$

(D) $\frac{x-3}{4} = -z \wedge y = 1$

7. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, uma circunferência de centro O e raio 1

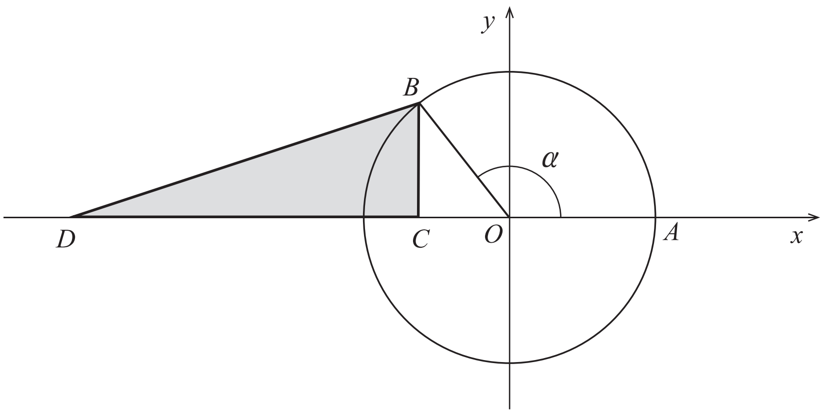


Figura 1

Sabe-se que:

- os pontos A e B pertencem à circunferência;
- o ponto A tem coordenadas $(1, 0)$
- os pontos B e C têm a mesma abcissa;
- o ponto C tem ordenada zero;
- o ponto D tem coordenadas $(-3, 0)$
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo AOB, com $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

Qual das expressões seguintes representa, em função de α, a área do triângulo $[BCD]$?

(A) $\frac{1}{2}(-3 - \operatorname{sen}\alpha)\cos\alpha$

(B) $\frac{1}{2}(-3 + \operatorname{sen}\alpha)\cos\alpha$

(C) $\frac{1}{2}(3 + \cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha$

(D) $\frac{1}{2}(3 - \cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha$

8. Na Figura 2, está representado, no plano complexo, um polígono regular $[ABCDEF]$

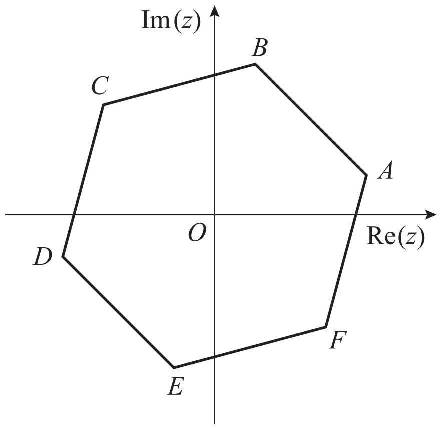


Figura 2

Os vértices desse polígono são as imagens geométricas das n raízes de índice n de um número complexo z

O vértice C tem coordenadas $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o vértice E?

(A) $2\sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{13}{12}\pi\right)$

(B) $4\ \text{cis}\left(\frac{13}{12}\pi\right)$

(C) $2\sqrt{2}\ \text{cis}\left(\frac{17}{12}\pi\right)$

(D) $4\ \text{cis}\left(\frac{17}{12}\pi\right)$

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

1.1. Considere $z_1 = \dfrac{(-1+\sqrt{3}\,i)^3}{1-i}$ e $z_2 = \operatorname{cis}\alpha$, com $\alpha \in [0, \pi[$

Determine os valores de α, de modo que $z_1 \times (z_2)^2$ seja um número imaginário puro, sem utilizar a calculadora.

1.2. Seja z um número complexo tal que $|1+z|^2 + |1-z|^2 \leq 10$

Mostre que $|z| \leq 2$

2. Uma caixa tem nove bolas distinguíveis apenas pela cor: seis pretas, duas brancas e uma amarela.

2.1. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar dessa caixa, simultaneamente e ao acaso, três bolas.

Determine a probabilidade de as bolas retiradas não terem todas a mesma cor.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2.2. Considere a caixa com a sua composição inicial.

Considere agora a experiência aleatória que consiste em retirar dessa caixa uma bola de cada vez, ao acaso e sem reposição, até ser retirada uma bola preta.

Seja X a variável aleatória «número de bolas retiradas dessa caixa».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X

Apresente as probabilidades na forma de fração.

3. Na Figura 3, está representada uma planificação de um dado tetraédrico equilibrado, com as faces numeradas com os números -1, 1, 2 e 3

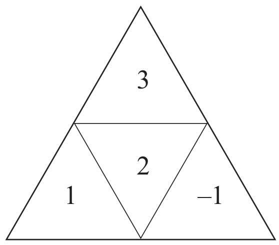


Figura 3

Considere a experiência aleatória que consiste em lançar esse dado duas vezes consecutivas e registar, após cada lançamento, o número inscrito na face voltada para baixo.

Sejam A e B os acontecimentos seguintes.

A: «o número registado no primeiro lançamento é negativo»

B: «o produto dos números registados nos dois lançamentos é positivo»

Elabore uma composição, na qual indique o valor de $P(A \mid B)$, sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada.

Na sua resposta, explique o significado de $P(A \mid B)$ no contexto da situação descrita, explique o número de casos possíveis, explique o número de casos favoráveis e apresente o valor de $P(A \mid B)$

4. Na Figura 4, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[OABCDEFG]$, de aresta 3

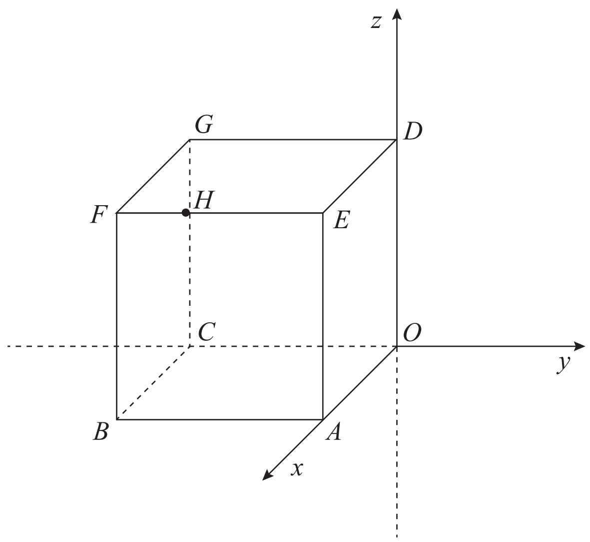


Figura 4

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox
- o ponto C pertence ao semieixo negativo Oy
- o ponto D pertence ao semieixo positivo Oz
- o ponto H tem coordenadas $(3, -2, 3)$

Seja α a amplitude, em radianos, do ângulo AHC

Determine o valor exato de $\operatorname{sen}^2 \alpha$, sem utilizar a calculadora.

5. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x-4}-3x+11}{4-x} & \text{se} \quad x<4\\[2ex] \ln\left(2e^{x}-e^{4}\right) & \text{se} \quad x\geq 4\end{cases}$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

5.1. Averigue se a função f é contínua em $x=4$

5.2. O gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua quando x tende para $+\infty$, de equação $y=x+b$, com $b\in\mathbb{R}$

Determine b

6. Seja f uma função cuja derivada f', de domínio $\mathbb{R}$, é dada por $f'(x)=x-\operatorname{sen}(2x)$

6.1. Determine o valor de $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2x-\pi}$

6.2. Estude o gráfico da função f, quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão em $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right[$, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Na sua resposta, deve indicar o(s) intervalo(s) onde o gráfico da função f tem concavidade voltada para cima, o(s) intervalo(s) onde o gráfico da função f tem concavidade voltada para baixo e, caso existam, as abcissas dos pontos de inflexão do gráfico da função f

7. Considere a função f, de domínio $\left]-e^2, +\infty\right[$, definida por $f(x) = -\ln\left(x + e^2\right)$

Na Figura 5, estão representados, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f e o triângulo $[ABC]$

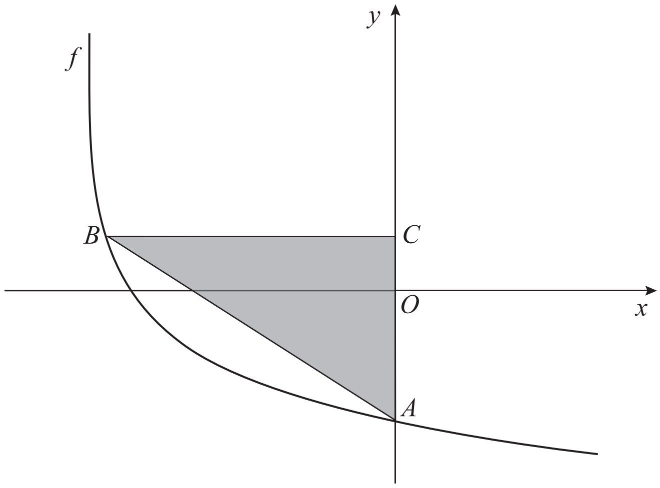


Figura 5

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(0, -2)$
- o ponto B pertence ao gráfico da função f e tem abcissa negativa;
- o ponto C pertence ao eixo Oy e tem ordenada igual à do ponto B
- a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 8

Determine a abcissa do ponto B, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

– escrever uma expressão da área do triângulo $[ABC]$ em função da abcissa do ponto B

– equacionar o problema;

– reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados, devidamente identificados;

– indicar a abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.**	(8 × 5 pontos)	40 pontos
		40 pontos

GRUPO II

1.	
1.1.	15 pontos
1.2.	15 pontos
2.	
2.1.	15 pontos
2.2.	15 pontos
3.	15 pontos
4.	15 pontos
5.	
5.1.	15 pontos
5.2.	15 pontos
6.	
6.1.	10 pontos
6.2.	15 pontos
7.	15 pontos
	160 pontos

TOTAL .... **200 pontos**