
EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/1.ª Fase

**Braille, Entrelinha 1,5, sem figuras, DAISY,
Coluna à esquerda (Arial 12, Entrelinha 1,5, sem figuras)**

Critérios de Classificação

12 Páginas

2014

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

Itens de seleção

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Itens de construção

Nos itens de resposta restrita e de resposta extensa, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração.

É classificada com zero pontos qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto deve ter em conta a organização dos conteúdos e a utilização da linguagem científica adequada.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação devem ser classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentam, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora deve ter em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados, devidamente identificados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação e as desvalorizações a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam a realização de cálculos.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora gráfica», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta deve ser pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado, que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas devem ser pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não deve ser desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade onde, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que **não** são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas deve ser a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

GRUPO I

1. a 8. (8 × 5 pontos)..... **40 pontos**

As respostas corretas são as seguintes.

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	C	A	C	B	B	D	C	D

GRUPO II

1.1. **15 pontos**

- Indicar um argumento de $-1 + \sqrt{3} i$ 1 ponto
- Indicar um argumento de $(-1 + \sqrt{3} i)^3$ 2 pontos
- Indicar um argumento de $1 - i$ 1 ponto
- Indicar um argumento de z_1 2 pontos
- Indicar um argumento de $(z_2)^2$ 1 ponto
- Indicar um argumento de $z_1 \times (z_2)^2$ 2 pontos
- Referir que $z_1 \times (z_2)^2$ é imaginário puro
- sse $\arg(z_1 \times (z_2)^2) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ 4 pontos
- Obter os valores de α 2 pontos

1.2. **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Considerar $z = a + bi$

- Substituir z por $a + bi$ na expressão $|1 + z|^2 + |1 - z|^2 \leq 10$ 1 ponto
- Referir que $|z|^2 = a^2 + b^2$ (ou equivalente) 2 pontos
- Obter $(1 + a)^2 + b^2 + (1 - a)^2 + b^2 \leq 10$ 3 pontos
- Desenvolver $(1 + a)^2$ 2 pontos
- Desenvolver $(1 - a)^2$ 2 pontos
- Obter $2 + 2(a^2 + b^2) \leq 10$ 2 pontos
- Concluir que $|z| \leq 2$ 3 pontos

2.º Processo

Considerar $z \bar{z} = |z|^2$

Escrever $ 1 + z ^2 = (1 + z)(\overline{1 + z})$	2 pontos
Escrever $ 1 - z ^2 = (1 - z)(\overline{1 - z})$	2 pontos
Escrever $\overline{1 + z} = \bar{1} + \bar{z}$	1 ponto
Escrever $\overline{1 - z} = \bar{1} - \bar{z}$	1 ponto
Escrever $(1 + z)(1 + \bar{z}) = 1 + z + \bar{z} + z ^2$	3 pontos
Escrever $(1 - z)(1 - \bar{z}) = 1 - z - \bar{z} + z ^2$	3 pontos
Escrever $ z ^2 \leq 4$	2 pontos
Concluir o pretendido	1 ponto

2.1. **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo (recorrendo ao acontecimento contrário)

Calcular a probabilidade de as três bolas retiradas terem todas a mesma cor ...	10 pontos
Indicar o número de casos possíveis	3 pontos
Indicar o número de casos favoráveis (ver nota 1)	5 pontos
Obter a probabilidade (ver nota 2)	2 pontos
Obter a probabilidade pedida (ver nota 3)	5 pontos

2.º Processo

Indicar o número de casos possíveis	3 pontos
Indicar o número de casos favoráveis (ver nota 1)	10 pontos
Obter a probabilidade pedida (ver nota 2)	2 pontos

Notas:

1. Se, na resposta, o número de casos favoráveis for superior ao número de casos possíveis ou se o número de casos favoráveis não for coerente com o modelo evidenciado pelo número de casos possíveis, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.
2. Se, na resposta, alguma das duas etapas anteriores tiver sido pontuada com zero pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é zero pontos.
3. Se, na resposta, apenas for referida a relação existente entre as probabilidades de dois acontecimentos contrários, a pontuação máxima a atribuir nesta etapa é 2 pontos.

2.2. **15 pontos**

Indicar os valores que a variável X pode tomar	3 pontos
Determinar a probabilidade de cada um dos valores da variável X (ver nota)	
..... (3 + 3 + 3 + 3)	12 pontos

Nota – Se, na resposta, a probabilidade de um dos valores da variável X for obtida como a probabilidade de essa variável não tomar nenhum dos outros valores da variável X , a pontuação a atribuir não deve ser desvalorizada.

Tópicos de resposta:

- explicar o significado de $P(A | B)$ no contexto da situação descrita (probabilidade de o número registado no primeiro lançamento ser negativo, sabendo que o produto dos números registados nos dois lançamentos é positivo);
- explicar o número de casos possíveis (se o produto dos números registados nos dois lançamentos é positivo, então os dois números têm o mesmo sinal, e existem 10 casos possíveis);
- explicar o número de casos favoráveis (nesses 10 casos possíveis, existe apenas um caso em que o número registado no primeiro lançamento é negativo, pelo que existe um caso favorável);
- indicar o valor de $P(A | B)$

Níveis	Descritores do nível de desempenho	Pontuação
7	Na resposta, são apresentados o valor de $P(A B)$ e as três explicações, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	15
6	Na resposta, são apresentados o valor de $P(A B)$ e as três explicações, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica. OU Na resposta, apenas são apresentadas as três explicações, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	13
5	Na resposta, são apresentados o valor de $P(A B)$ e apenas duas das três explicações, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada. OU Na resposta, apenas são apresentadas as três explicações, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	11
4	Na resposta, são apresentados o valor de $P(A B)$ e apenas duas das três explicações, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica. OU Na resposta, apenas são apresentadas duas das três explicações, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	9
3	Na resposta, são apresentados o valor de $P(A B)$ e apenas uma das três explicações, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada. OU Na resposta, apenas são apresentadas duas das três explicações, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	7
2	Na resposta, são apresentados o valor de $P(A B)$ e apenas uma das três explicações, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica. OU Na resposta, apenas é apresentada uma das três explicações, com organização coerente dos conteúdos e linguagem científica adequada.	5
1	Na resposta, apenas é apresentado o valor de $P(A B)$ OU Na resposta, apenas é apresentada uma das três explicações, com falhas na organização dos conteúdos ou na utilização da linguagem científica.	3

4. 15 pontos

- Indicar as coordenadas do ponto A 1 ponto
- Indicar as coordenadas do ponto C 1 ponto
- Identificar α como a amplitude do ângulo formado pelos vetores \overrightarrow{HA} e \overrightarrow{HC} 3 pontos
- Determinar as coordenadas do vetor \overrightarrow{HA} 1 ponto
- Determinar as coordenadas do vetor \overrightarrow{HC} 1 ponto
- Determinar a norma do vetor \overrightarrow{HA} 1 ponto
- Determinar a norma do vetor \overrightarrow{HC} 1 ponto
- Escrever $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} = \|\overrightarrow{HA}\| \times \|\overrightarrow{HC}\| \times \cos(\widehat{\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HC}})$ (ou equivalente) 1 ponto
- Calcular $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC}$ 1 ponto
- Calcular $\cos \alpha$ 2 pontos
- Escrever $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ (ou equivalente) 1 ponto
- Obter o valor de $\sin^2 \alpha$ 1 ponto

5.1. 15 pontos

- Determinar $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ OU determinar $f(4)$ 2 pontos
- Determinar $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ 10 pontos
- Escrever $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{e^{x-4} - 3x + 11}{4 - x}$ 1 ponto
- Escrever $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{e^{x-4} - 3x + 11}{4 - x} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{e^{x-4} - 3x + 11}{-(x - 4)}$
(ou equivalente) 1 ponto
- Escrever $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{e^{x-4} - 3x + 11}{-(x - 4)} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 3y - 1}{-y}$
(ou equivalente) (**ver nota**) 3 pontos
- Escrever $\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 3y - 1}{-y} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^y - 1}{-y} + 3 \right)$
(ou equivalente) 2 pontos
- Obter o valor de $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ 3 pontos
- Concluir que a função f não é contínua em $x = 4$ 3 pontos

Nota – Se, na resposta, for referido que $x \rightarrow 4^-$ é equivalente a $x - 4 \rightarrow 0^-$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

5.2. **15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2e^x - e^4) - x)$ 2 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2e^x - e^4) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2e^x - e^4) - \ln e^x)$ 4 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2e^x - e^4) - \ln e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2e^x - e^4}{e^x}\right)$ 3 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2e^x - e^4}{e^x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(2 - \frac{e^4}{e^x}\right)$ 3 pontos

Obter o valor de b 3 pontos

2.º Processo

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2e^x - e^4) - x)$ 2 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(2e^x - e^4) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln\left(e^x\left(2 - \frac{e^4}{e^x}\right)\right) - x\right)$
(ou equivalente) 4 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln\left(e^x\left(2 - \frac{e^4}{e^x}\right)\right) - x\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln e^x + \ln\left(2 - \frac{e^4}{e^x}\right) - x\right)$ 3 pontos

Escrever $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln e^x + \ln\left(2 - \frac{e^4}{e^x}\right) - x\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(2 - \frac{e^4}{e^x}\right)$ 3 pontos

Obter o valor de b 3 pontos

6.1. **10 pontos**

Escrever $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$ (ou equivalente) 3 pontos

Referir que $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 3 pontos

Calcular $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 2 pontos

Obter o valor de $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2x - \pi}$ 2 pontos

6.2. 15 pontos

- Determinar $f''(x)$ 4 pontos
 - Calcular $(x)'$ 1 ponto
 - Calcular $(\sin(2x))'$ 2 pontos
 - Obter $f''(x)$ 1 ponto

Determinar os zeros de f'' em $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[$ (**ver nota 1**) 3 pontos

Estudar a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico em $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[$ 6 pontos

Concluir que f'' é negativa em $]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[$ 1 ponto

Concluir que f'' é positiva em $]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}[$ e em $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}[$ 1 ponto

Referir que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[$ (**ver nota 2**) 2 pontos

Referir que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}[$ e em $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}[$ (**ver nota 3**) 2 pontos

Indicar as abscissas dos pontos de inflexão do gráfico da função f em $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[$ (1 + 1) 2 pontos

Notas:

1. Se, na resposta, não forem determinados os zeros de f'' em $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[$ mas se for apresentada a conclusão de que f'' é negativa em $]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[$ e de que f'' é positiva em $]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}[$ e em $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.
2. Se, na resposta, for referido que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[$, em vez de em $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.
3. Se, na resposta, for referido que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}[$ e em $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}[$, em vez de em $]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}[$ e em $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}[$, esta etapa deve ser considerada como cumprida.

7. **15 pontos**

Determinar $f'(x)$ 5 pontos

Escrever $f'(x) = -\frac{(x+e^2)'}{x+e^2}$ 2 pontos

Obter $f'(x)$ 3 pontos

Identificar o declive da reta tangente com $f'(0)$ 3 pontos

Calcular $f'(0)$ 2 pontos

Calcular $f(0)$ 2 pontos

Escrever a equação reduzida da reta pedida 3 pontos

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a 8..... (8 × 5 pontos)	40 pontos
	<hr/>
	40 pontos

GRUPO II

1.	
1.1.	15 pontos
1.2.	15 pontos
2.	
2.1.	15 pontos
2.2.	15 pontos
3.	15 pontos
4.	15 pontos
5.	
5.1.	15 pontos
5.2.	15 pontos
6.	
6.1.	10 pontos
6.2.	15 pontos
7.	15 pontos
	<hr/>
	160 pontos

TOTAL

200 pontos