Resolução da Prova 735 (Matemática B)

1.
1.1

Proposta da Isabel:

	margaridas	rosas	violetas
7 arranjos tipo A	112	28	56
7 arranjos tipo B	56	56	56
Total de flores necessárias	168	84	112

Proposta do Dinis:

	margaridas	rosas	violetas
10 arranjos tipo A	160	40	80
5 arranjos tipo B	40	40	40
Total de flores necessárias	200	80	120

A proposta da Isabel é viável e a proposta do Dinis não é viável, uma vez que não existem margaridas (nem violetas) em número suficiente.

1.2. Sejam x = n.º arranjos do tipo A e
y = n.º arranjos do tipo B.

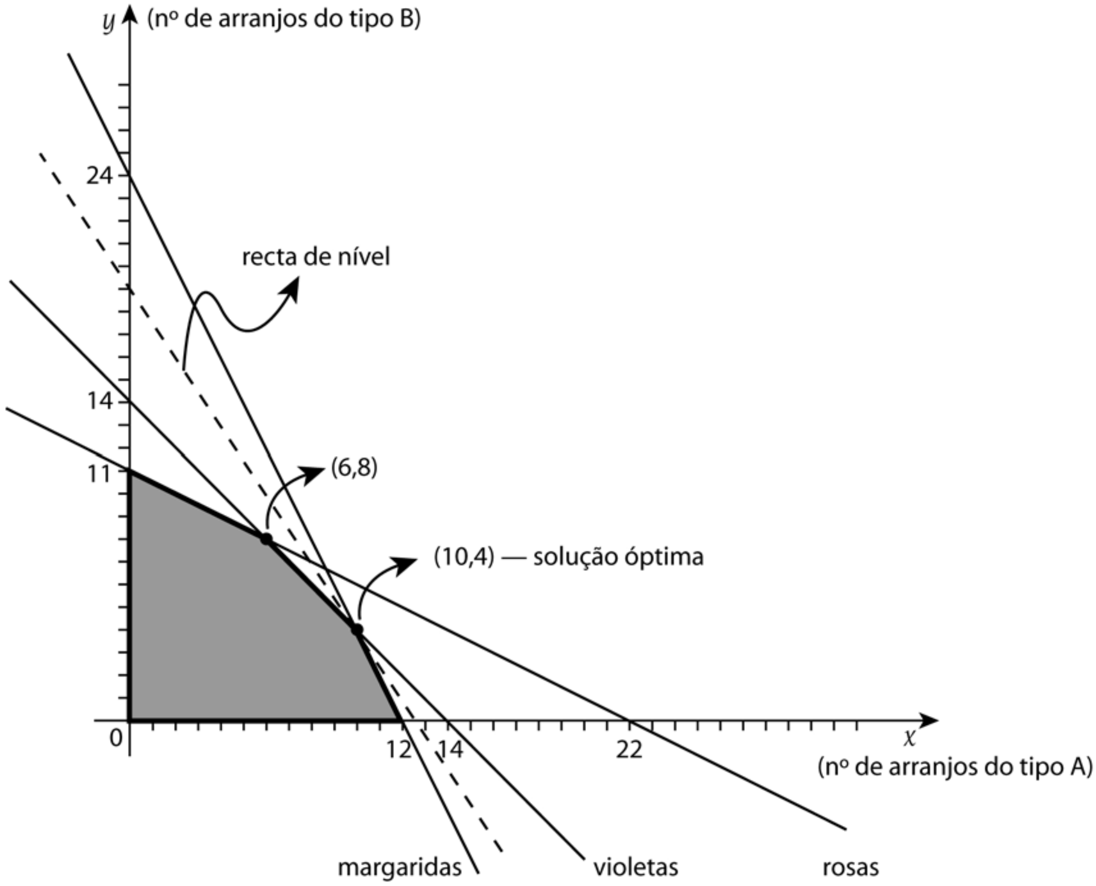
Pretendemos **maximizar** a função $L = 3x + 2y$ (função objectivo).
De acordo com o problema podemos organizar os dados do seguinte modo:

	n.º margaridas	n.º rosas	n. violetas
x arranjos do tipo A	16x	4x	8x
y arranjos do tipo B	8y	8y	8y
n.º total de flores	16x+8y	4x+8y	8x+8y
constrangimentos	$16x+8y \leq 192$	$4x+8y \leq 88$	$8x+8y \leq 112$

As restrições para as variáveis são, então,

$$\begin{cases} 16x + 8y \leq 192 \\ 4x + 8y \leq 88 \\ 8x + 8y \leq 112 \\ x, y \in lN_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -2x + 24 \\ y \leq -0{,}5x + 11 \\ y \leq -x + 14 \end{cases}$$

Geometricamente, tem-se:



1.º processo:

$$L = 3x + 2y \quad \Leftrightarrow \quad y = -1{,}5\,x + \frac{L}{2}\ .$$

Esta expressão define a família de rectas com declive $-1{,}5$. A recta da família que nos dá a informação sobre o maior lucro é, por observação geométrica, a que contém o ponto de coordenadas (10, 4).

Logo, devem produzir-se 10 arranjos do tipo A e 4 do tipo B (o lucro será de 38 euros $(3 \times 10 + 2 \times 4)$).

2.º processo:

A solução óptima é, habitualmente, um dos vértices do polígono de constrangimentos. Assim, basta testar cada uma das soluções.

x	y	L =3x+2y
0	11	22
6	8	34
10	**4**	**38**
12	0	36

Verifica-se que o lucro máximo é no ponto (10, 4).

2.

2.1. O n.º de cadeiras de cada uma das n filas da plateia são termos consecutivos de uma progressão aritmética. Sabemos que a soma destes n termos é igual a 465.

Assim,

$$\frac{10+52}{2} \times n = 465 \quad \Leftrightarrow \quad 31n = 465 \quad \Leftrightarrow \quad n = 15$$

Logo, confirma-se que a plateia tem 15 filas.

2.2.

1.ª fila	2.ª fila	3.ª fila	…	15.ª fila
10	10 + k	10 + 2k	…	10 + 14k

Tem-se, então,

$$52 = 10 + 14k \quad \Leftrightarrow \quad k = 3$$

Assim, o valor de k é igual a 3.

2.3. Das 15 filas da plateia existem 30 lugares com má visibilidade, 2 em cada uma das filas. Assim, a Nazaré verá satisfeita a sua pretensão se lhe for atribuído um dos 435 bilhetes correspondentes aos restantes lugares.

Tem-se:

$$p = \frac{435}{465} = \frac{29}{31} \qquad \text{ou} \qquad p = 1 - \frac{30}{465} = \frac{29}{31}$$

Logo, a probabilidade pedida é igual a $\frac{29}{31}$

3.

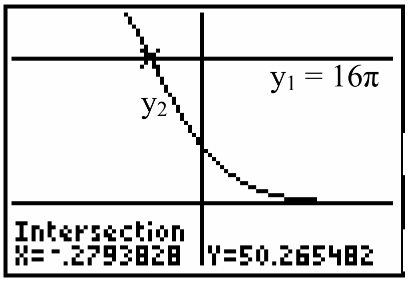
3.1. $r = 4 \Rightarrow A = \pi \times 4^2 = 16\pi \ (cm^2) \quad \rightarrow$ área da mancha circular de raio 4

Para determinar o valor pedido tem de resolver-se a condição $A(5) = 16\pi$, equivalente a

$$\frac{100}{1 + 4\,e^{5k}} = 16\,\pi \quad .$$

Considerando as funções $y_1 = \frac{100}{1 + 4\,e^{5x}}$ e $y_2 = 16\,\pi$, vamos calcular o ponto de intersecção dos seus gráficos.

No editor de funções da calculadora obtém-se:



O valor de k é aproximadamente igual a -0,28.

3.2.

$$\underset{[0\ ;\ 4]}{t.m.v.} = \frac{A(4)-A(0)}{4} = \frac{40{,}461-20}{4} \approx 5 \quad (cm^2/\text{s})$$

X	Y_1	
0	20	
1	24.3	
2	29.188	
3	34.608	
4	40.461	
5	46.598	
6	52.84	
Y_1=40.4609675192		

Durante os quatro primeiros segundos, a área da mancha aumentou, em média, 5 cm^2 por segundo.

4.

4.1.1. Sabe-se que

$-1 \leq \cos(cx) \leq 1$, para todo o valor de x. Como $b > 0$, virá

$-b \leq b\cos(cx) \leq b$ e

$a-b \leq a + b\cos(cx) \leq a+b$, ou seja,

$a-b \leq y \leq a+b$

Assim, como queríamos mostrar, o contradomínio da função é o intervalo $[\,a-b\ ,\ a+b\,]$.

4.1.2. $\dfrac{2\pi}{c}$ é período da função se e só se

$y\left(x+\dfrac{2\pi}{c}\right) = y(x)$, para todo o valor de x do domínio da função.

Tem-se

$$y\left(x+\frac{2\pi}{c}\right) = a + b\cos\left[c\left(x+\frac{2\pi}{c}\right)\right] = a+b\cos(cx+2\pi) \underset{\downarrow}{=} a+b\cos(cx) = y(x)$$

2π é período da função co-seno

Confirma-se, assim, o pretendido.

4.2. Por observação das figuras 1 e 2 o contradomínio da função é $[-0,71\,;0,87\,]$, intervalo de amplitude 1,58.

Amplitude do intervalo $[\,a-b\ ,\ a+b\,] = 2b$.

Logo, $2b = 1{,}58 \iff b = 0{,}79$.

Como $a+b = 0{,}87$, temos $a = 0{,}87 - 0{,}79 = 0{,}08$

Finalmente, dois maximizantes consecutivos são 0,002 e 0,004. O período positivo mínimo da função é 0,002. Assim,

$\dfrac{2\pi}{c} = 0{,}002 \iff c \approx 3142$

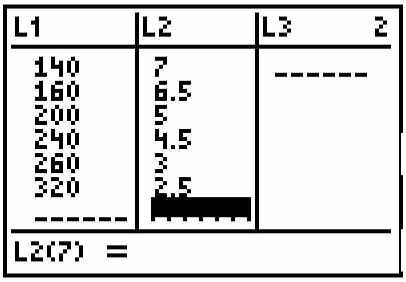
Logo, $a = 0{,}08$, $b = 0{,}79$ e $c \approx 3142$.5.

5.1. O número total de clientes é igual ao número total de telemóveis vendidos. Assim, a empresa vendeu 28,5 milhares de telemóveis (7 + 6,5 + 5 + 4,5 + 3 + 2,5).

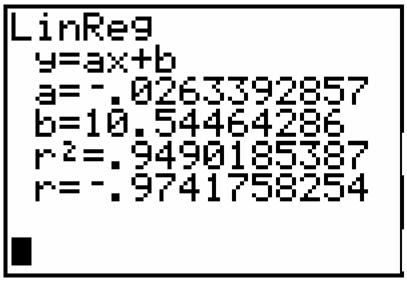
Destes, 13,5 milhares foram vendidos a um preço inferior a 180 euros.

A probabilidade pedida é, assim, $p = \frac{13{,}5}{28{,}5} = \frac{9}{19}$.

5.2. Introduzindo em L1 o preço, em euros, de cada telemóvel e em L2 o número de unidades vendidas, em milhares, obtém-se



Para este conjunto de dados, o coeficiente de correlação linear é aproximadamente igual a -0,97 (ver figura ao lado).



Este valor indica-nos que existe uma correlação negativa muito forte entre as variáveis n e p. As variáveis variam inversamente, isto é, à medida que o preço do telemóvel aumenta, o número de unidades vendidas diminui e vice-versa.

5.3. A quantia, em euros, que a empresa prevê vir a receber pela venda dos telemóveis do novo modelo é dada por

$$q = 1000n \times p$$

Dado que $n = -0{,}03p + 10$, vem

$$q = 1000n \times p = 1000(-0{,}03\,p + 10)p = -30\,p^2 + 10000\,p$$

6.

- $sen\,\alpha = \frac{16}{18} \Rightarrow \alpha \approx 1{,}0949$ (radianos)

- Sabe-se que $\frac{P_{circunf.\ de\ raio\ 18}}{2\pi} = \frac{P_{base\ do\ cone}}{2\alpha}$

Assim,

$$\frac{2\pi \times 18}{2\pi} = \frac{P_{base\ do\ cone}}{2 \times 1{,}0949} \Leftrightarrow P_{base\ do\ cone} = 39{,}4164\ cm$$

- Cálculo do raio da base do cone:

$$P_{base} = 2\pi\, r \quad \Leftrightarrow 2\,\pi\, r = 39{,}4164 \quad \Leftrightarrow r = \frac{39{,}4164}{2\,\pi} \approx 6{,}2733 \;\; cm$$

- Cálculo da altura do cone:

$$h = \sqrt{18^2 - 6{,}2733^2} \;\Leftrightarrow$$
$$h \approx 16{,}8714 \;\; cm$$

- Cálculo do volume do cone:

$$V = \frac{1}{3} \times \pi \times 6{,}2733^2 \times 16{,}8714 \;\Leftrightarrow$$
$$V \approx 695{,}3\, cm^3$$

Ora, $695{,}3\ cm^3 > 500\ cm^3$, pelo que o filtro construído tem capacidade superior a meio litro.

Fim

Esta proposta de resolução também pode ser consultada em http://www.apm.pt