

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO
 11.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)

**Curso Científico-Humanístico
 de Artes Visuais**

Duração da prova: 150 minutos
 2006

2.ª FASE

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA B

COTAÇÕES

1.	25
1.1.	15
1.1.1.	8
1.1.2.	7
1.2.	10
2.	32
2.1.	22
2.1.1.	12
2.1.2.	10
2.2.	10
3.	30
3.1.	15
3.2.	15
4.	43
4.1.	30
4.1.1.	5
4.1.2.	15
4.1.3.	10
4.2.	13
5.	45
5.1.	15
5.2.	30
5.2.1.	15
5.2.2.	15
6.	25
TOTAL	200

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Critérios gerais

1. Se o examinando se enganar na identificação do item a que está a responder, ou se a omitir, mas, pela resolução apresentada, for possível identificá-lo inequivocamente, a resposta deve ser vista e classificada.
2. Se o examinando apresentar mais do que uma resposta a um item, e não indicar, de forma inequívoca, a que pretende que seja classificada, deve ser vista e classificada apenas a que se encontra em primeiro lugar, na folha de resposta.
3. A cotação a atribuir a cada item deverá ser sempre um número inteiro, não negativo, de pontos.
4. Num item em que a respectiva resolução exija cálculos e/ou justificações, a cotação a atribuir deve estar de acordo com o seguinte critério:
 - Se o examinando se limitar a apresentar o resultado final, a cotação deve ser de 0 (zero) pontos.
 - Se o examinando não se limitar a apresentar o resultado final, a cotação deve ser a soma algébrica das cotações atribuídas a cada etapa, de acordo com o disposto nos pontos 6, 7, 8, 9 e 10 destes critérios gerais, e das penalizações previstas nos pontos 11 e 12 destes critérios gerais. Se a soma for negativa, a cotação a atribuir é de 0 (zero) pontos.
5. Alguns itens da prova podem ser correctamente resolvidos por mais do que um processo. Sempre que o examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nos critérios específicos, caberá ao professor classificador adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas. Salienta-se que deve ser aceite qualquer processo cientificamente correcto, mesmo que envolva conhecimentos não contemplados no programa da disciplina.
6. A cotação de cada item está subdividida pelas etapas que o examinando deve percorrer para o resolver.
 - 6.1. Em cada etapa, a cotação indicada é a máxima a atribuir.
 - 6.2. O classificador não pode subdividir, em cotações parcelares, a cotação atribuída a cada etapa.

Caso uma etapa envolva um único passo, testando apenas o conhecimento de um só conceito ou propriedade, e a sua resolução não esteja completamente correcta, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos.

Caso uma etapa envolva mais do que um passo (por exemplo, a resolução de uma equação, a obtenção de uma expressão em função de uma variável, etc.) e a sua resolução esteja incompleta, ou contenha incorrecções, a cotação a atribuir deve estar de acordo com o grau de incompletude e/ou a gravidade dos erros cometidos. Por exemplo:

 - erros de contas ocasionais devem ser penalizados em um ponto;
 - erros que revelem desconhecimento de conceitos, regras ou propriedades devem ser penalizados em, pelo menos, metade da cotação da etapa;
 - transposições erradas de dados do enunciado devem ser penalizadas em um ponto, desde que o grau de dificuldade da etapa não diminua;
 - transposições erradas de dados do enunciado devem ser penalizadas em, pelo menos, metade da cotação da etapa, caso o grau de dificuldade da etapa diminua.

- 6.3. Nas etapas cuja cotação se encontra discriminada por níveis de desempenho, o classificador deve enquadrar a resposta do examinando numa das descrições apresentadas. O classificador não pode atribuir uma cotação diferente das indicadas.
- 6.4. No caso de o examinando cometer um erro numa das etapas, as etapas subsequentes devem merecer a respectiva cotação, desde que o grau de dificuldade não tenha diminuído, e o examinando as execute correctamente, de acordo com o erro que cometeu.
- 6.5. Caso o examinando cometa, numa etapa, um erro que diminua o grau de dificuldade das etapas subsequentes, cabe ao classificador decidir a cotação máxima a atribuir a cada uma destas etapas. Em particular, se, devido a um erro cometido pelo examinando, o grau de dificuldade das etapas seguintes diminuir significativamente, a cotação máxima a atribuir a cada uma delas não deverá exceder metade da cotação indicada.
- 6.6. Pode acontecer que o examinando, ao resolver um item, não percorra explicitamente todas as etapas previstas nos critérios específicos. Todas as etapas não percorridas explicitamente pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam inequivocamente implícitos na resolução do item, devem receber a cotação indicada.
7. Existem, por vezes, etapas em que está previsto o recurso à calculadora. Nessas etapas, os critérios específicos subdividem-se em: «Explicação do método utilizado» e «Apresentação do(s) valor(es)».

7.1. Explicação do método utilizado:

De acordo com as instruções gerais para a realização da prova, o examinando deve apresentar todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora. Esta apresentação deve ser cotada de acordo com o critério que se segue, no qual, para cada nível de desempenho, é indicada uma percentagem. Esta percentagem deve ser aplicada sobre a cotação prevista para a explicação do método utilizado, e o valor obtido deve ser arredondado às unidades (por excesso, se a mantissa do número a arredondar for 0,5 ou superior).

Apresentação correcta e completa de todos os elementos relevantes..... 100%

Apresentação correcta, mas com ausência de alguns elementos relevantes

ou

Apresentação completa, mas com algumas incorrecções (por exemplo, não respeitar o domínio de uma função) 60%

Apresentação incompleta e com algumas incorrecções 20%

Ausência de explicação ou simples referências do tipo «Vi na calculadora»..... 0%

7.2. Apresentação do(s) valor(es):

Para cada valor que o examinando deve apresentar, os critérios específicos podem indicar um intervalo admissível. O valor apresentado pelo examinando pode pertencer, ou não, a esse intervalo.

- Se o valor pertencer ao intervalo, deve ser atribuída a cotação máxima prevista para essa apresentação, a menos de qualquer penalização prevista nos critérios específicos, por desrespeito relativo ao número de casas decimais com que o resultado deve ser apresentado.
- Se o valor não pertencer ao intervalo, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos.

8. Quando, num item, é pedida uma forma específica de apresentação do resultado final (por exemplo, «em minutos», «em percentagem», etc.), este deve ser apresentado na forma pedida. Se o resultado final apresentado pelo examinando não respeitar a forma pedida no enunciado (por exemplo, se o enunciado pedir o resultado em minutos, e o examinando o apresentar em horas), devem ser atribuídos 0 (zero) pontos à etapa correspondente ao resultado final. No entanto, o examinando não deve ser penalizado se não indicar a unidade em que é pedido o resultado (por exemplo, se o resultado final for 12 minutos, ou 12 metros, e o examinando escrever simplesmente 12, não deve ser penalizado).
9. O examinando deve respeitar sempre a instrução relativa à apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações. Se, numa etapa, o examinando não respeitar esta instrução, apresentando algo (valor, quadro, tabela, gráfico, etc.) que não resulte de trabalho anterior, deve ser atribuída a cotação de 0 (zero) pontos a essa etapa. Todas as etapas subsequentes que dela dependam devem ser igualmente cotadas com 0 (zero) pontos.
10. O examinando deve respeitar sempre qualquer instrução relativa ao método a utilizar na resolução de um item (por exemplo, «equacione o problema», «resolva graficamente», etc.). Na resolução apresentada pelo examinando, deve ser inequívoco, pela apresentação de todos os cálculos e de todas as justificações, o cumprimento da instrução. Se tal não acontecer, considera-se que o examinando não respeitou a instrução. A etapa em que se dá o desrespeito e todas as subsequentes que dela dependam devem ser cotadas com 0 (zero) pontos.
11. Se, na resolução de um item, o examinando utilizar simbologia, ou escrever uma expressão, inequivocamente incorrecta do ponto de vista formal (por exemplo, se escrever o símbolo de igualdade onde deveria estar o símbolo de equivalência), deve ser penalizado em um ponto, na cotação total a atribuir a esse item. Esta penalização não se aplica no caso em que tais incorrecções ocorram apenas em etapas cotadas com 0 (zero) pontos, nem a eventuais utilizações do símbolo de igualdade, onde, em rigor, deveria estar o símbolo de igualdade aproximada.
12. Existem itens em cujo enunciado é dada uma instrução relativa ao número mínimo de casas decimais que o examinando deve conservar, sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos. Indicam-se, a seguir, as penalizações a aplicar, na cotação total a atribuir ao item, em caso de desrespeito dessa instrução e/ou de arredondamentos mal efectuados.

Todos os valores intermédios estão de acordo com a instrução, mas existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado..... -1 ponto

Todos os valores intermédios estão bem arredondados, mas existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução..... -1 ponto

Existe, pelo menos, um valor intermédio mal arredondado e existe, pelo menos, um que não está de acordo com a instrução -2 pontos

Critérios específicos

1.1.1. 8

Determinar a média e o desvio padrão das classificações na disciplina de Matemática 4

Explicação do método utilizado (ver critério geral 7.1.)2

$\bar{x} = 18$ 1

$\sigma \approx 1,2$ 1

Determinar a média e o desvio padrão das classificações na disciplina de Informática 4

Explicação do método utilizado (ver critério geral 7.1.)2

$\bar{x} = 18$ 1

$\sigma \approx 1,6$ 1

1.1.2. 7

Apresenta-se a seguir um exemplo de resposta:

Observando os dois gráficos, o Pedro verificou que, na disciplina de Matemática, as classificações estão mais concentradas em torno da média do que na disciplina de Informática. O Pedro concluiu, assim, que os desvios padrão eram diferentes.

1.2. 10

Concluir que o número de casos favoráveis é 7 4

Concluir que o número de casos possíveis é 164

Determinar a probabilidade pedida $\left(\frac{7}{16}\right)$ (ver nota).....2

Nota:

Se o examinando não apresentar o resultado na forma de fracção irredutível, a cotação a atribuir à sua resposta deve ser desvalorizada em 1 ponto.

2.1.1. 12

Determinar o número de páginas que a Ana leu ao fim de n dias..... 6

Reconhecer que a situação se traduz por uma progressão geométrica de razão 2 e primeiro termo 12

Escrever a expressão que dá o número de páginas que a Ana leu ao fim de n dias $\left(1 \times \frac{1-2^n}{1-2} \right)$ 3

Simplificar a expressão anterior..... 1

Determinar o número de páginas que a Fátima leu ao fim de n dias6

Reconhecer que a situação se traduz por uma progressão aritmética de razão 2 e primeiro termo 32

Escrever a expressão que dá o número de páginas que a Fátima leu no n -ésimo dia $(3 + (n - 1) \times 2)$ 1

$3 + (n - 1) \times 2 = 1 + 2n$ 1

Escrever a expressão que dá o número de páginas que a Fátima leu ao fim de n dias $\left(\frac{3+1+2n}{2} \times n \right)$ 1

Simplificar a expressão anterior..... 1

2.1.2. 10

Determinar o número de dias que a Ana demora a ler o livro 4

Equacionar o problema $(2^n - 1 = 255)$ 2

$n = 8$ 2

Determinar o número de dias que a Fátima demora a ler o livro 4

Equacionar o problema $(n^2 + 2n = 255)$ 2

$n = 15$ 2

Resposta à questão colocada (25 de Abril) 2

2.2. 10

Concluir que o número de casos favoráveis é $10 + 56$ (**ver nota**)..... 6

Escrever a fracção $\frac{66}{255}$ 2

Apresentar a probabilidade pedida na forma de percentagem (26 %) 2

Nota:

Se o examinando considerar que o número de casos favoráveis é $9 + 55$, a cotação a atribuir a esta etapa deve ser de 4 pontos.

3.1. 15

Substituir, na expressão $N(t)$, a variável t por 0 7

$N(0) = \frac{125 A}{A+(125-A)}$ 3

$N(0) = \frac{125 A}{125}$ 3

$N(0) = A$ 2

3.2. 15

Equacionar o problema $\left(\frac{125 A}{A+(125-A)e^{-1}} = A + 23 \right)$ 8

Resolver a equação 7

Explicação do método (ver critério geral 7.1.) 4

$A \approx 21$ (**ver nota**) 3

Nota:

Se o examinando apresentar a resposta $A \approx 20$, a cotação a atribuir a esta etapa deve ser de 2 pontos.

4.1.1. 5

A cotação a atribuir à resposta do examinando deve estar de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Apresentar o intervalo correcto $]0,1[$	5
Apresentar um dos seguintes intervalos: $[0,1]$ ou $[0,1[$ ou $]0,1]$	3
Apresentar o intervalo $]0,2[$	1
Outras situações	0

4.1.2. 15

Volume da esfera $= \frac{4}{3} \pi x^3$	1
Aresta do cubo $= 2 - 2x$	2
Volume do cubo $= (2 - 2x)^3$	1
$(2 - 2x)^3 = (2 - 2x)^2 \times (2 - 2x)$	3
$(2 - 2x)^2 = 4 - 8x + 4x^2$	3
$(4 - 8x + 4x^2) \times (2 - 2x) = 8 - 24x + 24x^2 - 8x^3$	3
$V(x) = \frac{4}{3} \pi x^3 + 8 - 24x + 24x^2 - 8x^3$	1
Conclusão	1

4.1.3. 10

Determinar o valor de x (raio da esfera) para o qual o volume total da escultura é mínimo $(0,58)$ (ver nota)	8
Determinar a aresta do cubo correspondente $(0,84)$	2

Nota:

O examinando pode encontrar o minimizante de V graficamente ou analiticamente.

Se o examinando utilizar a via gráfica, com recurso à calculadora, a cotação desta etapa deve ser repartida da seguinte forma:

Explicação do método utilizado (ver critério geral 7.1.)	5
Indicar o minimizante	3
O intervalo admissível para o minimizante	
é $[0,57; 0,59]$ (ver critério geral 7.2.)	

Se o examinando utilizar a via analítica, a cotação desta etapa deve ser repartida da seguinte forma:

Determinar a taxa de variação da função	4
Determinar o minimizante	4

4.2. 13

Concluir que o raio da esfera é $\frac{1}{2}$ 2

Concluir que a aresta do cubo é 1 2

Determinar a área total da escultura, excluindo a face do cubo que está assente no chão 6

Área da superfície esférica (π) 2

Área de uma face do cubo (1) 1

Área de cinco faces (5)2

Área total ($5 + \pi$)1

Responder à questão colocada 3

$\frac{5 + \pi}{2,5} \approx 3,257$ 1

Conclusão (4 latas)2

5.1. 15

Se o examinando utilizar a via analítica para resolver esta questão, a cotação deve ser repartida da seguinte forma:

Concluir que π é maximizante de d (**ver nota**).....4

Determinar a distância máxima (152,1)4

Concluir que 0 é minimizante de d (**ver nota**) 3

Determinar a distância mínima (147,1)4

ou

$-1 \leq \cos x \leq 1$ 3

$0,0167 \geq -0,0167 \cos x \geq -0,0167$ 3

$1,0167 \geq 1 - 0,0167 \cos x \geq 0,9833$ 3

$152,1 \geq 149,6(1 - 0,0167 \cos x) \geq 147,1$ 3

Conclusão 3

Se o examinando utilizar a via gráfica, com recurso à calculadora, a cotação deve ser repartida da seguinte forma:

Explicação do método utilizado (ver critério geral 7.1.)5

Indicar o máximo..... 5

O intervalo admissível é [152; 152,2]
(ver critério geral 7.2.)

Indicar o mínimo..... 5

O intervalo admissível é [147; 147,2]
(ver critério geral 7.2.)

Nota:

Não se exige que o examinando utilize a relação entre zeros/sinal da taxa de variação e extremos/monotonia da função. O examinando pode obter o maximizante e o minimizante por observação directa da figura do enunciado.

5.2.1. 15

Mostrar que, para $x = \pi$, se tem $t = \frac{T}{2}$ 9

 Substituir x por π 2

 Obter a igualdade $\frac{2\pi t}{T} = \pi$ 3

 Mostrar que $\frac{2\pi t}{T} = \pi \Leftrightarrow t = \frac{T}{2}$ 4

Interpretar o resultado6

A cotação a atribuir deve estar de acordo com os seguintes níveis de desempenho:

Interpretação correcta (exemplo: «*O tempo que decorre entre a passagem da Terra pelo periélio e o instante em que a Terra atinge o ponto mais afastado da sua órbita, relativamente ao Sol, é metade do tempo que a Terra demora a descrever uma órbita completa.*») 6

Interpretação mal redigida, mas onde existe evidência de o examinando ter compreendido a situação (exemplos: «*Quando o $x = \pi$, demora-se metade dos dias a fazer uma volta completa de órbita.*»; «*Quando $x = \pi$ percorre-se metade da distância, demorando-se metade do tempo.*») 3

Outras situações (exemplo: «*O tempo para se chegar ao periélio é metade do tempo que demora a alcançar o Sol.*») 0

5.2.2. 15

Determinar o número de dias que decorrem entre 4 de Janeiro e 14 de Fevereiro (ver nota)	2
Escrever a equação $\frac{2\pi \times 41}{365,24} = x - 0,0167 \operatorname{sen} x$	4
Resolver a equação	6
Explicação do método utilizado (ver critério geral 7.1.)	3
Valor de x	3
O intervalo admissível é $[0,7162; 0,7163]$ (ver critério geral 7.2.)	
Determinar a distância pedida	3
Substituir, na expressão $149,6(1 - 0,0167 \cos x)$, x pelo valor encontrado	2
Resultado correctamente arredondado	1
Nota: A cotação desta etapa deve ser atribuída de acordo com o seguinte critério:	
Número de dias correcto (41)	2
Número de dias igual a 40 ou a 42	1
Outras situações	0

6. 25

Determinar a taxa de variação média da temperatura da água, no intervalo $[2; 3,5]$ ($-2,3$)	3
Determinar a taxa de variação média da temperatura da água, no intervalo $[2; 3]$ ($-2,4$)	3
Determinar a taxa de variação média da temperatura da água, no intervalo $[2; 2,5]$ ($-2,4$)	3
$T'(2) \approx -2,4$	4
Equacionar o problema ($-2,4 = k(85 - 25)$)	9
Determinar o valor de k ($-0,04$)	3