EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

10.º/11.º ou 11.º/12º Anos de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Duração da prova: 150 minutos **2.ª FASE**

2007

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA B

Identifique claramente os itens a que responde.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta (excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações).

É interdito o uso de «esferográfica-lápis» e de corrector.

As cotações da prova encontram-se na página 11.

A prova inclui um formulário (página 12).

Em todos os itens da prova, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Apresente uma única resposta a cada item. Se escrever mais do que uma resposta, deve indicar, de forma inequívoca, a que pretende que seja classificada (riscando todas as que pretende anular).

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à sua calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

• sempre que recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora, apresente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);

• sempre que recorrer a uma tabela obtida na sua calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;

• sempre que recorrer a estatísticas obtidas na sua calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente as listas que introduziu na calculadora para as obter.

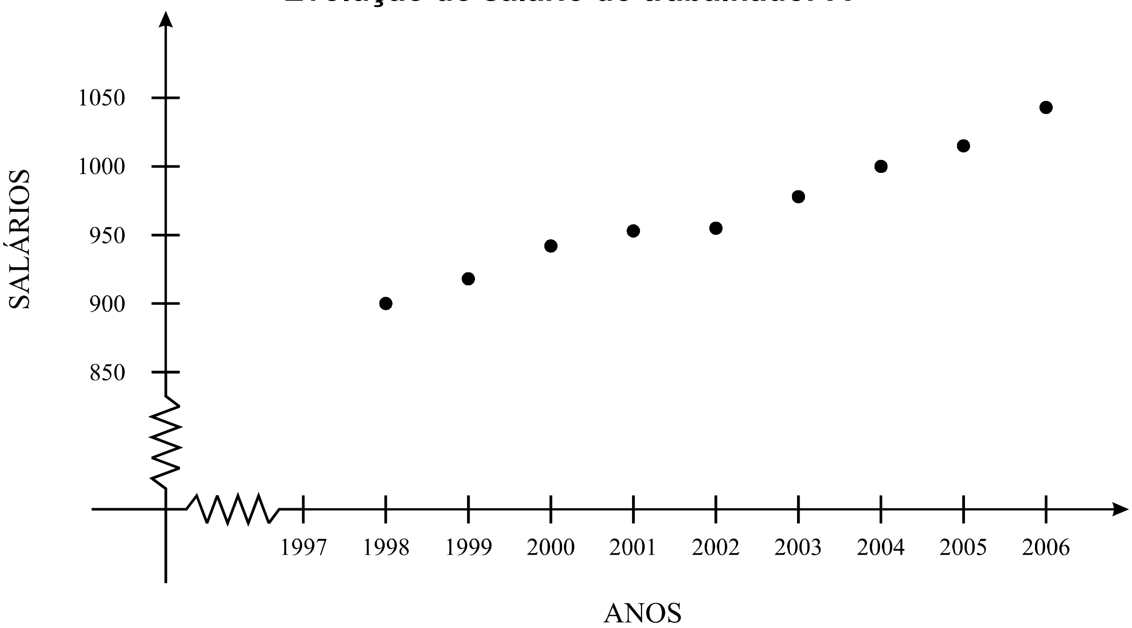
1. A evolução da massa salarial de um conjunto de trabalhadores é, por vezes, explicável através de modelos matemáticos.

Numa dada empresa, fez-se um estudo comparativo da evolução dos vencimentos (em euros) de dois trabalhadores, **A** e **B**, entre 1998 e 2006.

- Relativamente ao trabalhador **A**, o valor do vencimento mensal em cada ano, no período compreendido entre 1998 e 2006, é apresentado na tabela seguinte e reproduzido num diagrama de dispersão.

Anos	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Salário	900	918	942	953	955	978	1000	1015	1043

Evolução do salário do trabalhador A



- Relativamente ao trabalhador **B**, sabe-se que, em 1998, recebia mensalmente 652 euros e que, nos anos seguintes, referentes ao período em estudo, o valor do seu vencimento mensal pode ser obtido através do modelo

$$v_n = 652 \times 1{,}0502^{n-1}$$

Nota: a variável n está associada aos anos relativos ao período em estudo, concretamente, $n = 1$ corresponde a 1998, $n = 2$ corresponde a 1999, etc.

1.1. **Utilizando a sua calculadora**, indique um valor aproximado do coeficiente de correlação linear entre as variáveis descritas na tabela (anos/salário) referente ao trabalhador **A**. Apresente o resultado com duas casas decimais.

Interprete esse valor, tendo em conta o diagrama de dispersão correspondente.

1.2. Tome em atenção que o modelo que traduz a evolução do salário do trabalhador **B** é uma progressão geométrica.

1.2.1. Indique o primeiro termo e a razão da progressão geométrica em questão.

1.2.2. Um trabalhador aufere, por ano, 12 ordenados mensais mais o subsídio de férias e o décimo terceiro mês, ambos com valor igual ao do ordenado mensal.

Utilizando a fórmula apropriada (que faz parte do formulário), calcule, aproximadamente, o valor da totalidade dos vencimentos auferidos pelo trabalhador **B** entre 1998 e 2006, inclusive.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Nota: Sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

2. O campo de futebol de um dado clube tem uma bancada destinada a não sócios, que leva $4\,000$ espectadores. Se o preço de cada bilhete for 10 euros, prevê-se que a lotação dessa bancada fique esgotada.

Com base em experiências anteriores, verifica-se que, se o preço de cada bilhete for aumentado numa certa percentagem, x, sobre o valor base (10 euros), o número de espectadores baixa metade dessa percentagem. Por exemplo, se o preço dos bilhetes aumentar 10% , $x = 0{,}1$, o número de espectadores sofre um decréscimo de 5%.

Admitindo a exactidão do modelo descrito e considerando sempre o aumento percentual, x, sobre o preço base (10 euros), responda às questões que se seguem.

2.1. Mostre que, se x for o aumento percentual do preço de cada bilhete para aquela bancada, num dado jogo, então a receita de bilheteira, R, é dada por:

$$R(x) = -20\,000\,x^2 + 20\,000\,x + 40\,000 \text{ , com } 0 \leq x \leq 2$$

Tenha em atenção que:

- *o preço de cada bilhete,* p*, em função do aumento percentual,* x*, é dado por* $p(x) = 10\,(1 + x)$
- *o número de espectadores,* n*, em função do aumento percentual,* x*, é dado por* $n(x) = 4\,000 - 2\,000\,x$

2.2. Um dos elementos da direcção do clube sugere que o preço de cada bilhete seja de 20 euros, para serem maximizadas as receitas de bilheteira. Porém, um segundo elemento da direcção opõe-se, dizendo que o ideal é manter o preço de cada bilhete a 10 euros, uma vez que as receitas de bilheteira são superiores se assim for.

Num pequeno texto, comente o argumento de cada um dos elementos da direcção do clube, tendo em conta o objectivo de maximizar as receitas de bilheteira.

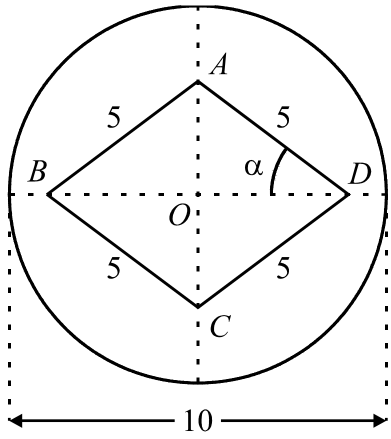
Deve incluir, obrigatoriamente, na sua resposta:

- o valor da percentagem, x, que a direcção do clube deve aplicar sobre o preço base (10 euros), para que se maximizem as receitas de bilheteira, e o respectivo valor da receita (no caso de discordar da opinião de cada um dos elementos da direcção);
- um argumento, fundamentado, referente às propostas de cada um dos elementos da direcção, dizendo se concorda, ou não, com elas;
- todos os elementos recolhidos na utilização da sua calculadora gráfica que se tenham mostrado relevantes.

2.3. À entrada para o recinto do jogo, cada espectador, sócio ou não sócio, recebeu um cartão numerado para se habilitar a um sorteio. Estavam presentes 6825 espectadores, dos quais 40% eram não sócios. Foram sorteados, simultaneamente, dois números. Qual a probabilidade de ambos os contemplados serem sócios?

Apresente o resultado final com aproximação às centésimas.

3. Numa determinada localidade, o responsável pelo planeamento urbanístico apresentou uma proposta para a construção de uma rotunda com 10 metros de diâmetro. No centro da rotunda, pretende-se construir um jardim em forma de losango, com 20 metros de perímetro, como sugere a figura. À volta do jardim, serão colocados calçada e outros elementos decorativos.



Relativamente à figura, considere que:

- os pontos A, B, C e D são os vértices do losango;
- o ponto O é o centro da circunferência;
- o ângulo ADO tem de amplitude α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

3.1. Mostre que a área, em m^2, da zona destinada ao jardim é dada, em função de α, por:

$$A(\alpha) = 50\, cos\, \alpha \,.\, sen\, \alpha \;, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

3.2. Determine $A\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Interprete geometricamente o resultado obtido, indicando qual a forma particular do losango, para $\alpha = \frac{\pi}{4}$

4. No período de testes que antecedeu a entrada em funcionamento de um gasómetro, com capacidade de 100 toneladas, procedeu-se ao seu enchimento, continuamente, durante 24 horas.

Por razões de segurança, o gasómetro foi lastrado com $2{,}5$ toneladas de gás, após o que se iniciou a operação de enchimento. A partir daí, o seu enchimento foi feito de acordo com o modelo:

$$M(t) = \frac{100}{1+39\,e^{-0{,}49t}}\text{, sendo } 0 \leq t \leq 24$$

(M representa a massa total, expressa em toneladas, existente no gasómetro t horas desde o início do seu enchimento.)

Nota: Na resolução das questões seguintes, sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve duas casas decimais.

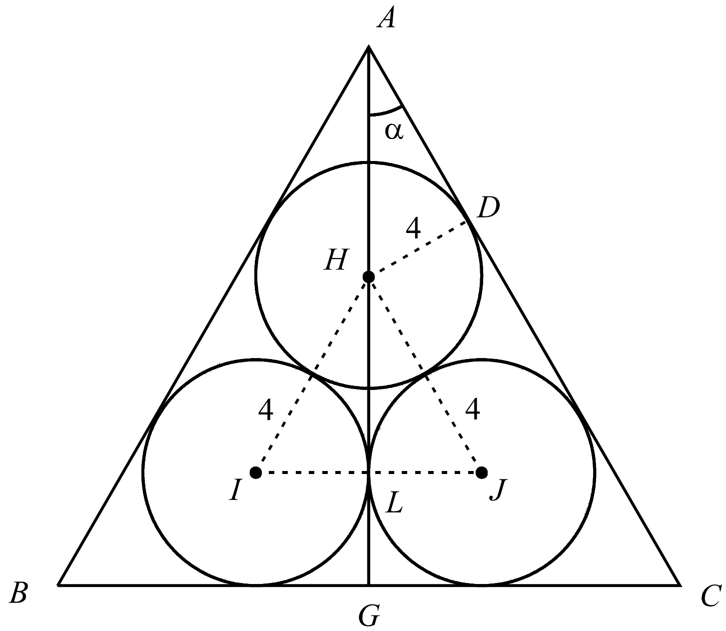
4.1. Qual era a massa total, aproximada, existente no gasómetro 3 horas após o início do seu enchimento?

Apresente o resultado arredondado às centésimas.

4.2. Durante o período em que decorre o enchimento do gasómetro, fará sentido afirmar que existe um dado intervalo de tempo em que a taxa de variação média do modelo assume um valor negativo?

Justifique devidamente a sua resposta.

5. Para vedar três canteiros circulares, com 4 metros de raio cada, um agricultor decidiu colocar uma rede em forma de triângulo equilátero, $[ABC]$, como a figura sugere.



Relativamente à figura, considere que:

- as circunferências são tangentes entre si;
- os lados do triângulo são tangentes às circunferências;
- os pontos H, I e J são os centros das circunferências;
- G é o ponto médio de $[BC]$;
- D é ponto do lado $[AC]$ tangente à circunferência de centro H;
- L é ponto de tangência das circunferências de centros I e J, respectivamente;
- α é a amplitude do ângulo DAH.

Quantos metros da rede mencionada necessita, aproximadamente, o agricultor para vedar os três canteiros?

Apresente o resultado final arredondado às unidades.

Nota: Sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve três casas decimais.

Sugere-se que:

- *determine a altura do triângulo* $[HIJ]$*;*
- *determine a altura do triângulo* $[ABC]$*;*
- *determine o lado do triângulo* $[ABC]$*.*

FIM

COTAÇÕES

1. .... 32 pontos

1.1 ....12 pontos

1.2. ....20 pontos

1.2.1. .... 8 pontos

1.2.2. .... 12 pontos

2. .... 60 pontos

2.1. ....16 pontos

2.2. ....24 pontos

2.3. ....20 pontos

3. .... 44 pontos

3.1. .... 22 pontos

3.2. ....22 pontos

4. .... 40 pontos

4.1. .... 18 pontos

4.2. ....22 pontos

5. .... 24 pontos

TOTAL .... 200 pontos

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r \quad (\alpha - \textit{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;} \quad r - \textit{raio})$

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\, maior \times Diagonal\, menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\, maior + Base\, menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ $(\alpha - \textit{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;} \quad r - \textit{raio})$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r - \textit{raio da base};\ g - \textit{geratriz})$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r - \textit{raio})$

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3 \qquad (r - \textit{raio})$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$