Proposta de Resolução do Exame de Matemática B
Cod. 735 – 2ª Fase 2009

Grupo I

1. Sejam X_1 e X_2 as variáveis "Número saído na 1ª jogada" e "Número saído na 2ª jogada", respectivamente.

Tem-se $P(X_1=1) = P(X_2=1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$$P(X_1=2) = P(X_2=2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(X_1=3) = P(X_2=3) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

A tabela seguinte dá-nos os valores de X, para os valores de X_1 e X_2

X_1 \ X_2	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6

$$P(X=2) = P(X_1=1) \times P(X_2=1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=3) = P(X_1=1) \times P(X_2=2) + P(X_1=2) \times P(X_2=1)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=4) = P(X_1=1) \times P(X_2=3) + P(X_1=2) \times P(X_2=2) + P(X_1=3) \times P(X_2=1)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{16}$$

$$P(X=5) = P(X_1=2) \times P(X_2=3) + P(X_1=3) \times P(X_2=2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$P(X=6) = P(X_1=3) \times P(X_2=3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

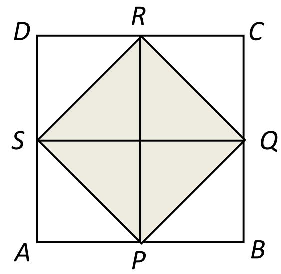
Então a tabela de distribuição de probabilidades de X é

x_i	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$ = 0,25	$\frac{1}{4}$ = 0,25	$\frac{5}{16}$ = 0,3125	$\frac{1}{8}$ = 0,125	$\frac{1}{16}$ = 0,0625

2. Média dos números saídos nas 820 jogadas é 1 × 0,55 + 2 × 0,20 + 3 × 0,25 = 1,7.

Grupo II

1. Dividindo o quadrado [ABCD] pelas suas medianas, obtemos 8 triângulos rectângulos geometricamente iguais entre si. Seja *A* a área de cada um.



Então

Área do quadrado [ABCD] = 8 *A*

Área do quadrado [PQRS] = 4 *A*

Logo, Área do quadrado [PQRS] = $\frac{1}{2}$ Área do quadrado [ABCD].

2.

Peça	1	2	3	4	5	6
Área da pedra preciosa (cm^2)	8	4	2	1	0,5	0,25

Como a área do exterior é 4×4 = 16 cm^2 e no ponto 1 já foi verificado que o quadrado inscrito com vértices nos pontos médios do quadrado exterior tem metade da área do quadrado exterior, então a área da maior pedra preciosa é 8 cm^2.

Soma das áreas das faces visíveis das pedras = 8 + 4 + 2 + 1 + 0,5 + 0,25 = 15,75

Somas das áreas 15,75 cm^2.

Grupo III

1. Se o perímetro do mural é 26 m, a soma de dois lados consecutivos é 13 e portanto, as suas medidas, em metros, são

$$x \qquad \text{e} \qquad 13 - x$$

Para obter as medidas da tapeçaria basta subtrair os valores correspondentes às margens respectivas:

$$x - 2\times0{,}5 = x - 1 \qquad\qquad 13 - x - 2\times1 = 11 - x$$

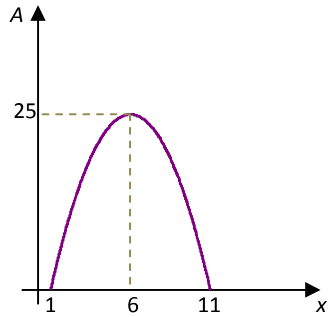
Como as medidas dos lados têm de ser números positivos, tem-se

$x - 1 > 0 \quad \wedge \quad 11 - x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1 \quad \wedge \quad x < 11 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]1, 11[$

2. Área da tapeçaria = base × altura

$A(x) = (x - 1)(11 - x) = 11x - x^2 - 11 + x = -x^2 + 12x - 11 \qquad x \in]1, 11[$

3. A função $A(x)$ é uma quadrática em que $a<0$, logo o gráfico é parte de uma parábola com a concavidade voltada para baixo. O valor máximo é a ordenada do vértice.



Zeros: $x = 1 \ \vee \ x = 11$

Abcissa do vértice: $x = \dfrac{1+11}{2} = 6$

Ordenada do vértice: $A(6) = 25$

A tapeçaria tem uma área máxima de 25 m^2, no caso em que $x = 6$ metros.

Grupo IV

1.

1.1. O algarismo 8 tem 8% de ocorrências

$8 - P(8) \approx 4,0765$

Com a aproximação pedida, $8 - P(8) \approx 4,1$

1.2. De acordo com o modelo encontrado, a percentagem de ocorrência do algarismo 1 é

$P(1) = 26{,}6723 - 10{,}9399\, ln(1) = 26{,}6723.$

Se a distribuição tem por base uma amostra de 216 dados,

$0{,}266723\, x\, 216 \approx 57{,}6$ ou seja 58 números começam com o algarismo 1.

2.

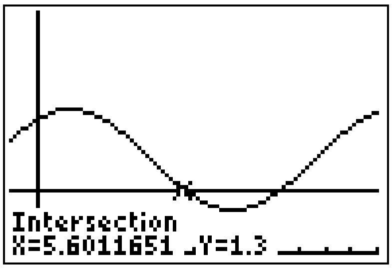
Introduzindo a função na calculadora e pedindo uma tabela com valores arredondados às milésimas, obtém-se

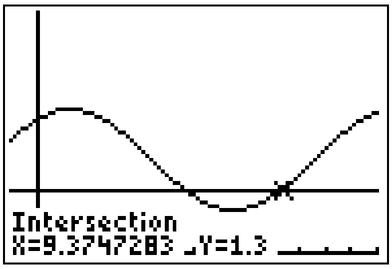
n	1	2	3	4	5	6	7
P(n)	0,301	0,176	0,125	0,097	0,079	0,067	0,058

Trata-se do algarismo 7.

Grupo V

1. Representando a função M(t) e a recta y = 1,3 e determinando a intersecção dos dois gráficos, considerando só o período até às 13 horas visto que se quer o período da manhã, tem-se:





Um dos pontos de intersecção corresponde t ≈ 5,6012, ou seja

5 horas e 36 minutos.

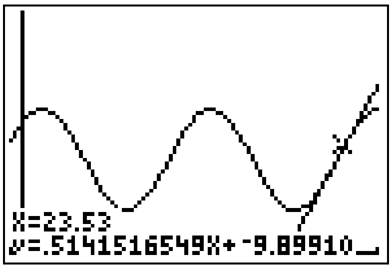
O outro ponto de intersecção corresponde t ≈ 9,3747, ou seja às 9 horas e 22 minutos.

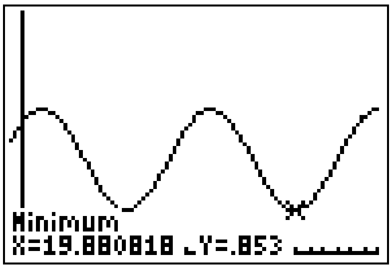
Logo será entre cerca das 5h e 36 minutos e as 9 horas e 22 minutos que é possível apanhar o marisco.

2.

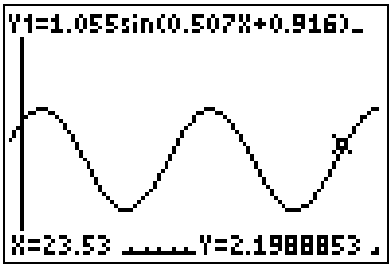
O barco esteve encalhado desde as 6,11 horas, até às 23,53 horas, totalizando $23{,}53 - 6{,}11 = 17{,}42$.
17,42 horas correspondem a 17 horas e 25,2 minutos, ou seja, passaram cerca de 17 horas e 25 minutos desde que o barco ficou encalhado até ser libertado, o que contraria a informação dada pela comunicação do jornal local.

O barco foi desencalhado no instante $t = 23{,}53$, altura em que o nível das águas do mar subia a uma taxa aproximada de 0,51 metros por hora, como se pode identificar na calculadora. Na notícia, dava-se a informação errada de que a taxa seria de 0,7 metros por hora.





Na última baixa-mar, antes da libertação da embarcação, o nível das águas do mar era de 0,853 metros.



Às 23,53 horas o nível era de 2,199 metros, o que nos permite concluir que a maré já tinha subido 1,346 metros (2,199 – 1,346),

um valor inferior ao comunicado pelo jornal local.