GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova Escrita de Matemática B

10.º e 11.º Anos de Escolaridade

Prova 735/1.ª Fase

15 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2013

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente feitos a lápis e a seguir passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente, sempre que recorrer:

- às potencialidades gráficas da calculadora, apresente o(s) gráfico(s) obtido(s), bem como as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
- a uma tabela obtida na calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- a estatísticas obtidas na calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma reta de regressão, etc.), apresente a(s) lista(s) que introduziu na calculadora para as obter.

A prova inclui, na página 3, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α *– amplitude, em graus, do ângulo ao centro;* r *– raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α *– amplitude, em graus, do ângulo ao centro;* r *– raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r *– raio da base;* g *– geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r *– raio*)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r *– raio da base;* g *– geratriz*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r *– raio*)

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

GRUPO I

Portugal é, tradicionalmente, um grande produtor e consumidor de azeite.

1. Uma empresa de produtos agrícolas vende azeite no mercado interno e no mercado externo.

Relativamente ao ano de 2014, admita que:

- a empresa poderá vender, no total, até 6 mil toneladas de azeite;
- a quantidade de azeite a vender pela empresa no mercado externo não poderá ultrapassar 3 mil toneladas;
- a empresa terá uma despesa de 2000 euros por cada milhar de toneladas com a venda do azeite no mercado interno e uma despesa de 4000 euros por cada milhar de toneladas com a venda do azeite no mercado externo;
- a despesa total da empresa com a venda do azeite não poderá exceder 16 000 euros.

Admita ainda que, no ano de 2014, a empresa obterá um lucro de 500 euros por cada milhar de toneladas com a venda do azeite no mercado interno e um lucro de 600 euros por cada milhar de toneladas com a venda do azeite no mercado externo.

Designe por x a quantidade de azeite, em milhares de toneladas, a vender no mercado interno e por y a quantidade de azeite, em milhares de toneladas, a vender no mercado externo, no ano de 2014.

Determine a quantidade de azeite, em milhares de toneladas, que se deverá vender no mercado interno e a quantidade de azeite, em milhares de toneladas, que se deverá vender no mercado externo, no ano de 2014, de modo que, nas condições referidas, o lucro da empresa, nesse ano, seja máximo.

Na sua resposta, percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

- indicar a função objetivo;
- indicar as restrições do problema;
- representar, graficamente, a região admissível referente ao sistema de restrições;
- calcular a quantidade de azeite, em milhares de toneladas, que se deverá vender no mercado interno e a quantidade de azeite, em milhares de toneladas, que se deverá vender no mercado externo, correspondentes à solução do problema.

2. Durante o ano de 2012, um produtor lançou no mercado interno um novo tipo de azeite.

Uma parte desse azeite foi vendida embalada e a parte restante foi vendida a granel, durante dez semanas.

Admita que a quantidade total de azeite vendido, V, em litros, desde o dia em que foi lançado no mercado até ao instante t, pode ser dada, aproximadamente, por

$$V(t) = \frac{550}{1 + e^{-0,42t}} - 275 \quad \text{com } t \in [0, 10]$$

A variável t representa o tempo, em semanas, decorrido após o dia em que o azeite foi lançado no mercado.

2.1. Sabe-se que, no embalamento do azeite, apenas foram usadas embalagens de 75 cl

Qual poderia ter sido, de acordo com o modelo apresentado para a quantidade total de azeite vendido, o número máximo de embalagens de azeite vendidas durante a sétima semana?

Justifique a sua resposta.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, duas casas decimais.

2.2. Dez semanas após o dia em que o azeite foi lançado no mercado, verificou-se que a quantidade de azeite vendido embalado durante esse período de tempo correspondia a cerca de 43% da quantidade total de azeite vendido.

Determine, de acordo com o modelo apresentado para a quantidade total de azeite vendido, a quantidade de azeite vendido a granel durante essas dez semanas.

Apresente o resultado em litros, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, duas casas decimais.

GRUPO II

Francis Galton foi um matemático inglês que, entre outras investigações, se dedicou ao estudo da distribuição normal.

Galton é o autor de uma experiência, considerada clássica em Estatística, que se realiza num dispositivo que designou por Quincunx.

Esse dispositivo é uma placa plana com pregos fixos, todos iguais, uniformemente espaçados e alinhados. A primeira linha tem 1 prego, a segunda linha tem 2 pregos, e assim sucessivamente, até à enésima linha, que tem n pregos. Na base da placa, existem $n+1$ cavidades, numeradas de 1 a $n+1$, da esquerda para a direita, todas com a mesma largura e separadas umas das outras. A Figura 1 ilustra uma Quincunx com sete linhas.

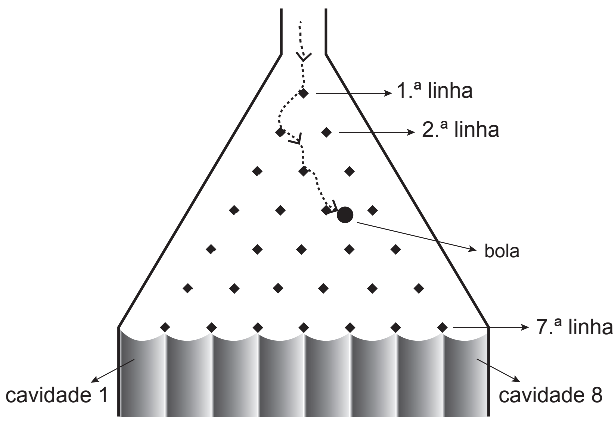

Figura 1

A experiência consiste no seguinte: deixam-se cair bolas do centro da parte superior da placa; cada uma dessas bolas desce sempre em contacto com a placa; em cada linha, a bola toca apenas num dos pregos dessa linha e desce, aleatoriamente, pelo espaço situado imediatamente à esquerda ou pelo espaço situado imediatamente à direita desse prego, tocando no prego da linha seguinte imediatamente abaixo desse espaço, e assim sucessivamente, acabando por se depositar numa das cavidades da base.

1. Admita que, numa Quincunx com apenas duas linhas, como a que se representa na Figura 2, se deixa cair uma bola do centro da parte superior da placa. Considere que a probabilidade de a bola descer pelo espaço situado imediatamente à esquerda de cada prego é igual à probabilidade de a bola descer pelo espaço situado imediatamente à direita do mesmo prego.

Qual é a probabilidade de a bola acabar por se depositar na cavidade central?

Justifique a sua resposta.

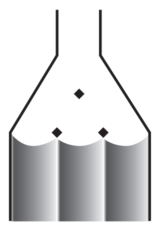

Figura 2

2. Admita que se construía uma Quincunx com 100 linhas.

Quantos pregos teria, no total, essa Quincunx?

Justifique a sua resposta.

3. Determine quantas cavidades tem uma Quincunx com um total de 435 pregos nas duas últimas linhas.

4. Na experiência descrita, quando a quantidade de bolas e a quantidade de linhas da Quincunx são suficientemente elevadas, o número da cavidade em que uma bola acaba por se depositar pode ser modelado por uma distribuição normal.

Considere que a experiência se vai realizar numa Quincunx com 151 linhas, deixando-se cair 5000 bolas do centro da parte superior da placa.

Seja X a variável aleatória «número da cavidade em que uma bola acaba por se depositar».

Admita que X pode ser modelada por uma distribuição normal $N(76{,}5\ ;\ 6{,}1)$

Assim, por exemplo, $P(4{,}5 < X < 5{,}5)$ dá, aproximadamente, a probabilidade de uma bola acabar por se depositar na cavidade 5

Determine, de acordo com o modelo apresentado, quantas bolas, aproximadamente, acabarão por se depositar entre a cavidade 60, inclusive, e a cavidade 83, inclusive.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, quatro casas decimais.

GRUPO III

Entende-se por comprimento do dia, num determinado local, o tempo decorrido entre o instante em que ocorre o nascer do Sol e o instante em que ocorre o pôr do Sol.

Na resolução dos dois itens seguintes, tenha em consideração que o ano de 2012 teve 366 dias.

1. Na tabela seguinte, construída de acordo com os dados do Observatório Astronómico de Lisboa, apresentam-se os comprimentos de alguns dias, em horas, no Funchal, no ano de 2012.

Ordem do dia x	**Comprimento do dia no Funchal** $F(x)$
1	10,03
41	10,87
81	12,17
121	13,47
161	14,27
201	14,02
241	12,95
281	11,63
321	10,45
361	10,02

Um modelo que descreve bem a relação entre o comprimento do dia no Funchal e a ordem desse dia é o de regressão sinusoidal e pode ser definido por

$$F(x) = a\,\mathrm{sen}\,(bx + c) + d \qquad \text{com } x \in \{1, ..., 366\}$$

em que a, b, c e d são parâmetros constantes e $F(x)$ é o comprimento do dia, em horas, no Funchal, no dia de ordem x

Neste modelo, considera-se o argumento da função seno em radianos.

Estime, com base no modelo de regressão sinusoidal obtido a partir dos dados da tabela, o comprimento do dia, em horas, no Funchal, no dia 1 de dezembro de 2012.

Apresente o resultado em horas, arredondado às unidades.

Na sua resolução, comece por escrever os valores dos parâmetros a, b, c e d, referentes à função F, arredondados às milésimas.

2. Admita que, no ano de 2012, o comprimento do dia, C, em horas, num determinado local, pode ser dado, em função da ordem do dia, x, desse ano, por

$$C(x) = 12 + 2\,\text{sen}\left(\frac{x-97}{50}\right) \qquad \text{com } x \in \{1, ..., 366\}$$

O argumento da função seno está em radianos.

Verificou-se que, relativamente ao local considerado, em vários dias do mês de julho do ano de 2012, o comprimento de cada um desses dias foi superior a 13 horas e 48 minutos.

Determine, de acordo com o modelo apresentado, o número total de dias do mês de julho do ano de 2012 em que essa situação se verificou.

GRUPO IV

O projeto de arquitetura de um novo edifício público prevê a construção de janelas de vários tipos. Na elaboração do projeto, foi considerada a relação entre a forma geométrica das janelas, a tipologia dos vidros utilizados na sua construção e a intensidade da luz natural pretendida para os espaços interiores do edifício.

1. O projeto de arquitetura prevê a construção de janelas ogivais, cuja face exterior é delimitada superiormente por dois arcos de circunferência, tal como ilustra a janela apresentada na Figura 3.

A Figura 4 mostra um esquema de uma janela desse tipo, no qual se podem observar, além de outros elementos geométricos auxiliares, os segmentos de reta $[EA]$, $[AB]$ e $[BC]$ e os arcos de circunferência CD e DE, que, no seu conjunto, delimitam a face exterior da janela, representada por $ABCDE$

Figura 3

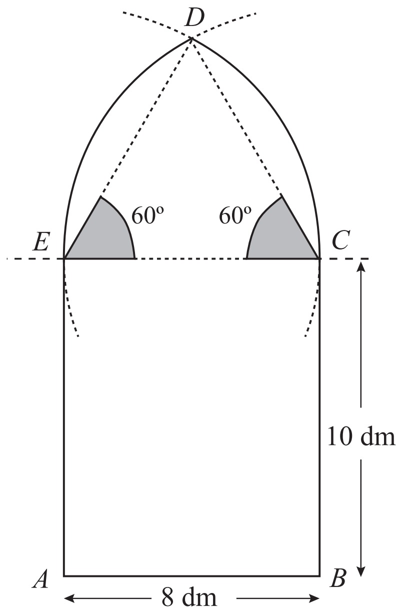

Figura 4

Sabe-se que:

- $[ABCE]$ é um retângulo, no qual $\overline{AB} = 8\,\text{dm}$ e $\overline{BC} = 10\,\text{dm}$
- $[ECD]$ é um triângulo equilátero, contido no plano que contém $[ABCE]$
- ECD é um sector circular de centro no ponto E, com 60° de amplitude e $8\,\text{dm}$ de raio;
- CDE é um sector circular de centro no ponto C, com 60° de amplitude e $8\,\text{dm}$ de raio.

1.1. Determine o perímetro da face exterior da janela, representada por $ABCDE$

Apresente o resultado em decímetros, arredondado às centésimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, três casas decimais.

1.2. Mostre que o valor da área do sector circular ECD, em dm^2, arredondado às décimas, é $33{,}5$

1.3. Determine a área da face exterior da janela, representada por $ABCDE$

Apresente o resultado em decímetros quadrados, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve duas casas decimais.

Note que o valor da área do sector circular ECD, arredondado com uma casa decimal, é $33{,}5\ \mathrm{dm}^2$

2. O projeto de arquitetura prevê também a construção de janelas de outro tipo.

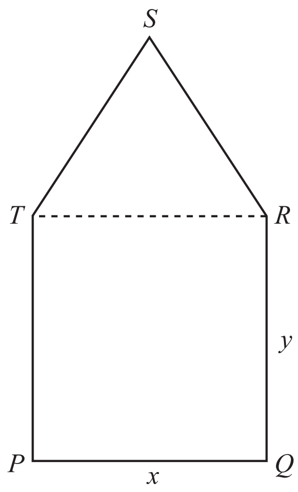

Figura 5

A Figura 5 representa, esquematicamente, a face exterior de uma dessas janelas, em que:

- $[PQRT]$ é um retângulo, no qual $\overline{PQ} = x\,\text{dm}$ e $\overline{QR} = y\,\text{dm}$
- $[TRS]$ é um triângulo equilátero, contido no plano que contém $[PQRT]$

Para a elaboração do projeto, foi realizado um estudo, no qual se consideraram várias hipóteses para os valores das dimensões x e y, variando a área da face exterior da janela e mantendo constante o seu perímetro.

Na Figura 6, está representada graficamente a função A, que dá a área da face exterior da janela, em dm^2, para cada valor da dimensão x, e está assinalado o ponto correspondente ao máximo da função.

Admita que a abcissa desse ponto é $9{,}4$

Na Figura 7, está representada graficamente a função que a cada valor da dimensão x faz corresponder o respetivo valor da dimensão y e está assinalado o ponto do gráfico de coordenadas $(9{,}4\;;\;5{,}9)$

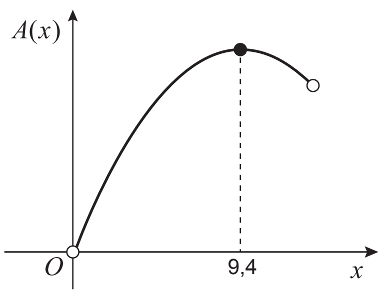

Figura 6

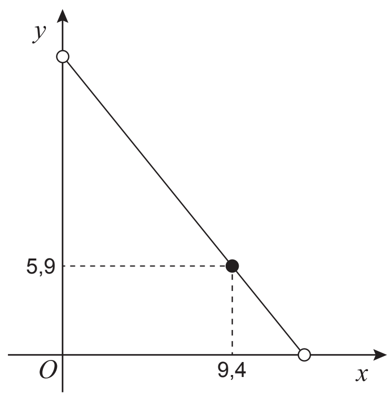

Figura 7

Interprete, no contexto da situação descrita, o significado dos valores $x = 9{,}4$ e $y = 5{,}9$

3. No estudo realizado no âmbito do projeto de arquitetura, foram ponderadas diversas hipóteses para o vidro não opaco que seria colocado nas janelas. Essas hipóteses diferiam quanto ao tipo e quanto à espessura do vidro, aspetos que fazem variar a percentagem de luz que atravessa o vidro.

De acordo com o estudo, a percentagem de luz, P, que atravessa um vidro não opaco, de espessura x, em milímetros, é dada por

$$P(x) = 10^{-0{,}001\,k\,x + 2}$$

em que k é uma constante cujo valor depende do tipo de vidro.

Nesse estudo, registaram-se as seguintes afirmações:

A) Para um certo tipo de vidro, em que $k = 20$, se o vidro tiver $5\,\text{mm}$ de espessura, então a percentagem de luz que o atravessa é superior a 75%

B) Se a percentagem de luz que atravessa um vidro com $5\,\text{mm}$ de espessura for cerca de 70%, então a constante k tem um valor inferior a 20

C) Para quaisquer dois vidros do mesmo tipo, em que $k = 20$, se um deles tiver mais $15\,\text{mm}$ de espessura do que o outro, então a percentagem de luz que atravessa o vidro de maior espessura é cerca de metade da percentagem de luz que atravessa o vidro de menor espessura.

Elabore uma pequena composição na qual justifique, com base no modelo apresentado, que as afirmações A) e C) são verdadeiras e que a afirmação B) é falsa.

FIM

Página em branco

COTAÇÕES

GRUPO I

1.		30 pontos	
2.			
	2.1.	15 pontos	
	2.2.	10 pontos	
			55 pontos

GRUPO II

1.	15 pontos	
2.	10 pontos	
3.	15 pontos	
4.	15 pontos	
		55 pontos

GRUPO III

1.	15 pontos	
2.	15 pontos	
		30 pontos

GRUPO IV

1.			
	1.1.	10 pontos	
	1.2.	5 pontos	
	1.3.	15 pontos	
2.		10 pontos	
3.		20 pontos	
			60 pontos

TOTAL .... **200 pontos**