GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova Escrita de Matemática B

10.º e 11.º Anos de Escolaridade

Prova 735/Época Especial

13 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2013

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente feitos a lápis e a seguir passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente, sempre que recorrer:

- às potencialidades gráficas da calculadora, apresente o(s) gráfico(s) obtido(s), bem como as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
- a uma tabela obtida na calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- a estatísticas obtidas na calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma reta de regressão, etc.), apresente a(s) lista(s) que introduziu na calculadora para as obter.

A prova inclui, na página 3, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr $(\alpha$ *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*$)$

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ $(\alpha$ *– amplitude, em graus, do ângulo ao centro;* r *– raio*$)$

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ $(\alpha$ *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*$)$

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ $(\alpha$ *– amplitude, em graus, do ângulo ao centro;* r *– raio*$)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ $(r$ *– raio da base;* g *– geratriz*$)$

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ $(r$ *– raio*$)$

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ $(r$ *– raio da base;* g *– geratriz*$)$

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ $(r$ *– raio*$)$

Cilindro: $Área\ da\ base \times Altura$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

GRUPO I

Na Figura 1, está representado um logotipo. O desenhador que criou este logotipo inspirou-se no traçado dos gráficos de duas funções e na forma de um trapézio.

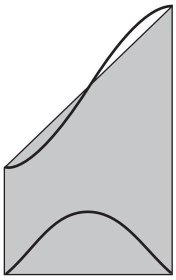

Figura 1

O desenhador começou por elaborar um esquema, que se reproduz na Figura 2. Nesta figura, estão representados, num referencial ortogonal e monométrico xOy :

- parte do gráfico da função f definida por $f(x) = \frac{x}{2} + \cos x$, com o argumento da função cosseno em radianos;
- parte do gráfico da função g que associa a cada x a taxa de variação instantânea da função f nesse ponto;
- os pontos A e D, cujas abcissas são dois zeros consecutivos da função g
- os pontos B e C, pertencentes ao gráfico da função f, cujos valores das coordenadas, arredondados às décimas, são, respetivamente, $(8{,}9 \ ; 3{,}6)$ e $(13{,}1 \ ; 7{,}4)$
- o trapézio retângulo $[ABCD]$, assinalado a sombreado.

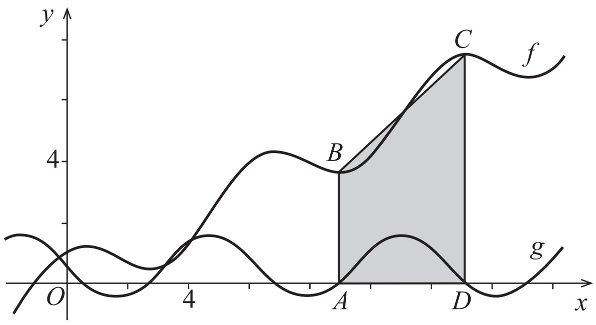

Figura 2

1. Determine a área do trapézio $[ABCD]$

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, não proceda a arredondamentos.

2. A reta BC intersecta o gráfico da função f num outro ponto, distinto dos pontos B e C

Determine as coordenadas desse ponto.

Apresente os valores das coordenadas desse ponto arredondados às décimas.

Em cálculos intermédios, utilize valores arredondados às décimas.

Na sua resposta, deve começar por determinar a equação reduzida da reta BC

3. A ordenada do ponto C corresponde a um máximo relativo da função f

Justifique a ocorrência desse máximo com base na relação existente entre o sinal da função g e a monotonia da função f

GRUPO II

O telefone é um dos meios de comunicação mais utilizados na atualidade. Entre outras funções, permite realizar chamadas e enviar mensagens escritas.

1. Uma operadora de telecomunicações publicitou novos tarifários para telemóveis.

1.1. Num desses tarifários, destinado a empresas, em que a duração de cada chamada e o número de caracteres de cada mensagem escrita não podem exceder determinados valores, estabelece-se que:

- o número de mensagens escritas não pode ser superior ao triplo do número de chamadas;
- o número de mensagens escritas não pode ser inferior ao dobro do número de chamadas;
- o preço de cada chamada é 30 cêntimos;
- o preço de cada mensagem escrita é 15 cêntimos.

Uma empresa que aderiu a esse tarifário dispõe de um total de 600 euros para gastar em chamadas e em mensagens escritas.

Designe por x o número de chamadas a efetuar pela empresa e designe por y o número de mensagens escritas a enviar pela empresa.

Determine quantas chamadas a empresa deverá efetuar e quantas mensagens escritas a empresa deverá enviar, de modo que o número total de chamadas e de mensagens escritas seja máximo.

Na sua resposta, percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

- indicar a função objetivo;
- indicar as restrições do problema;
- representar, graficamente, a região admissível referente ao sistema de restrições;
- calcular o número de chamadas que a empresa deverá efetuar e o número de mensagens escritas que a empresa deverá enviar, correspondentes à solução do problema.

1.2. Num dos tarifários dessa operadora, destinado a utilizadores individuais, a realização de uma chamada com uma duração inferior ou igual a 3 minutos tem um custo de 30 cêntimos, e a realização de uma chamada com uma duração superior a 3 minutos tem um custo de 1 euro.

Admita que a duração, em segundos, de uma chamada efetuada por um cliente que aderiu a esse tarifário é uma variável aleatória que segue uma distribuição normal, de valor médio 140 segundos e desvio padrão 20 segundos.

Escolhe-se, ao acaso, uma chamada efetuada por esse cliente.

Determine a probabilidade de o custo dessa chamada ser igual a 1 euro.

Apresente o resultado arredondado às milésimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, quatro casas decimais.

2. Os diagramas de dispersão apresentados na Figura 3 e na Figura 4 foram construídos com base em dados estatísticos, divulgados pela Autoridade Nacional de Comunicações, relativos ao número de chamadas efetuadas a partir de telefones da rede fixa e ao número de mensagens escritas enviadas, no período compreendido entre os anos de 2004 e de 2011.

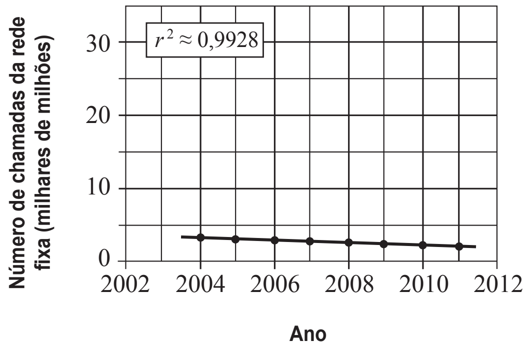

Figura 3

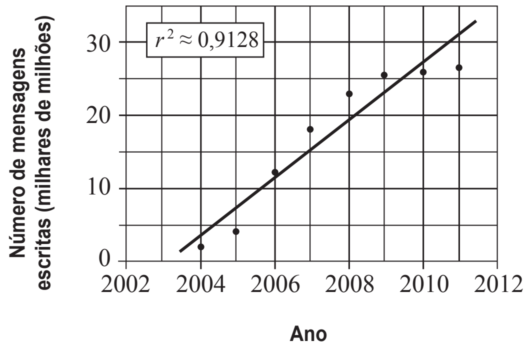

Figura 4

O diagrama de dispersão da Figura 3 dá, para cada ano, o número, em milhares de milhões, de chamadas efetuadas a partir de telefones da rede fixa durante esse ano.

O diagrama de dispersão da Figura 4 dá, para cada ano, o número, em milhares de milhões, de mensagens escritas enviadas durante esse ano.

Em cada diagrama de dispersão, está representada a reta de regressão e indicado um valor aproximado do quadrado do coeficiente de correlação linear.

Admita que a reta de regressão representada no diagrama de dispersão da Figura 3 é definida pela equação

$$y = -0{,}1502x + 304{,}22$$

em que x representa o ano e y representa o número, em milhares de milhões, de chamadas efetuadas a partir de telefones da rede fixa durante esse ano.

Considere as seguintes afirmações.

A) A correlação linear entre as variáveis relativas ao diagrama de dispersão da Figura 3 é negativa.

B) A correlação linear entre as variáveis relativas ao diagrama de dispersão da Figura 3 é mais forte do que a correlação linear entre as variáveis relativas ao diagrama de dispersão da Figura 4.

C) De acordo com o modelo de regressão linear apresentado, o número estimado de chamadas que se efetuariam a partir de telefones da rede fixa durante o ano de 2012 seria superior a dois milhares de milhões.

Elabore uma pequena composição, na qual justifique a veracidade das afirmações A), B) e C).

GRUPO III

Muitas empresas recorrem à publicidade para divulgarem os seus produtos e serviços.

A nova administração de uma empresa de cerâmica decidiu reforçar o investimento em publicidade durante o ano de 2012.

1. Um dos investimentos consistiu na aquisição de um painel publicitário.

O projeto de elaboração desse painel previa que, num quadrado, se circunscrevesse um semicírculo, de modo que a área da região exterior ao quadrado e interior ao semicírculo correspondesse a determinados valores.

A Figura 5 é um esquema, que não está à escala, dessa parte do projeto.

Num referencial ortogonal e monométrico xOy, representou-se o quadrado $[PQRS]$ e o semicírculo de centro no ponto O, circunscrito a esse quadrado. Relativamente ao esquema da Figura 5, no qual a região exterior ao quadrado e interior ao semicírculo se encontra representada a sombreado, sabe-se que:

- $[PQ]$ está contido no eixo Ox
- $\overline{OP} = \overline{OQ}$
- O ponto R tem abcissa x
- $0 < x < 1{,}3$

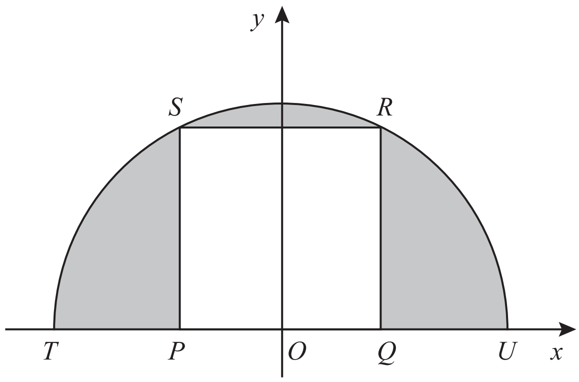

Figura 5

Admita que cada unidade do referencial corresponde a 1 metro.

1.1. Mostre que a área, A, em m^2, da região representada a sombreado na Figura 5 pode ser dada, em função de x, por

$$A(x) = \frac{5\pi - 8}{2}\,x^2 \quad \text{para } 0 < x < 1{,}3$$

1.2. Para que a área, A, da região representada a sombreado na Figura 5 seja superior a $2{,}5\,\mathrm{m}^2$, o conjunto dos valores possíveis do lado do quadrado $[PQRS]$ é um intervalo de números reais da forma $]a, b[$

Determine o valor de a e o valor de b, em metros, arredondados às décimas.

Em cálculos intermédios, conserve uma casa decimal.

2. No final do ano de 2012, a empresa de cerâmica efetuou um estudo cujo objetivo era prever o investimento que seria necessário realizar em publicidade durante o ano de 2013.

Admita que, a partir desse estudo, se estabeleceu que a relação entre o valor do investimento em publicidade, p, em centenas de euros, e o valor das vendas, $C(p)$, em milhares de euros, previsto pela empresa de cerâmica para o ano de 2013, é dada por

$$C(p) = \frac{5p+3}{p+2} \quad \text{para } 0 \leq p < 10$$

e que, para um investimento p, o ganho publicitário é dado por $C(p) - C(0) - 0{,}1p$

2.1. Considere dois investimentos realizados em publicidade: um no valor de 600 euros e o outro no valor de 800 euros.

De acordo com o modelo apresentado, para qual dos investimentos é que a empresa de cerâmica terá maior ganho publicitário?

Justifique a sua resposta, apresentando o ganho publicitário, em euros, arredondado às unidades, correspondente a cada um dos investimentos.

Em cálculos intermédios, não proceda a arredondamentos.

2.2. Admita que uma empresa de tecelagem também fez a previsão do investimento que iria realizar em publicidade durante o ano de 2013.

Admita, ainda, que a relação entre os valores das vendas, em milhares de euros, previstos pelas duas empresas para o ano de 2013, é dada, para o mesmo valor, p, do investimento em publicidade, em centenas de euros, por

$$T(p) = C(p) - 1{,}05 \quad \text{para } 0 \leq p < 10$$

em que $T(p)$ é o valor das vendas previsto pela empresa de tecelagem.

Interprete, no contexto da situação descrita, o significado do valor $-1{,}05$

GRUPO IV

As escalas musicais e a propagação do som são exemplos que ilustram a relação entre a Música e a Matemática.

A escala musical, dita escala bem temperada, é construída a partir das notas designadas por Lá, Lá#, Si, Dó, Dó#, Ré, Ré#, Mi, Fá, Fá#, Sol, Sol#, em que, por exemplo, Lá# se lê «Lá sustenido».

Nesta escala, as notas musicais estão colocadas numa sequência crescente de frequências, em Hertz (Hz), das notas mais graves para as notas mais agudas, conforme ilustra a tabela.

Multiplicando a frequência de uma nota musical por $2^{\frac{1}{12}}$, obtém-se a frequência da nota musical seguinte, de modo que, de doze em doze termos da sequência, a frequência, em Hz, duplica. Por exemplo, a frequência da nota Lá de ordem 13 é o dobro da frequência da nota Lá de ordem 1.

Ordem	Nota	Frequência (em Hz)
1	**Lá**	**27,5**
2	Lá#	≈29,1352
3	Si	≈30,8677
4	Dó	≈32,7032
5	Dó#	≈34,6478
6	Ré	≈36,7081
7	Ré#	≈38,8909
8	Mi	≈41,2034
9	Fá	≈43,6535
10	Fá#	≈46,2493
11	Sol	≈48,9994
12	Sol#	≈51,9131
13	**Lá**	**55**
…	…	…
24	Sol#	≈103,8262
25	**Lá**	**110**
…	…	…
36	Sol#	≈207,6523
37	**Lá**	**220**
…	…	…
48	Sol#	≈415,3047
49	**Lá**	**440**
…	…	…
60	Sol#	≈830,6094
61	**Lá**	**880**
…	…	…

1. As frequências, em Hz, das notas musicais desta escala são termos consecutivos de uma progressão geométrica (a_n) de primeiro termo 27,5 e razão $2^{\frac{1}{12}}$

Considere para $2^{\frac{1}{12}}$ o valor, arredondado com seis casas decimais, 1,059463

1.1. Uma nota Mi desta escala tem frequência compreendida entre 440 Hz e 880 Hz

Determine o valor, em Hz, dessa frequência.

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, seis casas decimais.

1.2. Calcule a soma dos termos da progressão geométrica (a_n) maiores do que 55 e menores do que 880

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, seis casas decimais.

2. O som propaga-se sob a forma de uma onda. Em determinadas condições, o som de uma nota musical corresponde a uma onda sonora que pode ser descrita matematicamente por uma função trigonométrica do tipo $y = a\cos(kx)$, em que a e k são constantes reais.

Sabe-se que a frequência, em Hz, de uma nota musical pode ser dada por $\frac{1}{T}$, em que T é o período positivo mínimo da função trigonométrica que descreve a respetiva onda sonora.

Numa experiência realizada numa aula de Matemática, um aluno soprou no topo do gargalo de uma garrafa de vidro e produziu o som de uma nota musical.

Admita que o som dessa nota musical correspondeu a uma onda sonora que pode ser descrita pela função definida por

$f(x) = \cos(1382x)$, com o argumento da função cosseno em radianos.

O som produzido pelo sopro do aluno no topo do gargalo da garrafa de vidro era de que nota musical?

Justifique a sua resposta.

Apresente o valor da frequência dessa nota musical, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, conserve seis casas decimais.

FIM

Página em branco

COTAÇÕES

GRUPO I

1.	10 pontos
2.	15 pontos
3.	10 pontos
	35 pontos

GRUPO II

1.	
1.1.	30 pontos
1.2.	10 pontos
2.	20 pontos
	60 pontos

GRUPO III

1.	
1.1.	20 pontos
1.2.	15 pontos
2.	
2.1.	20 pontos
2.2.	10 pontos
	65 pontos

GRUPO IV

1.	
1.1.	10 pontos
1.2.	15 pontos
2.	15 pontos
	40 pontos

TOTAL .... **200 pontos**